PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 1, proposé le 17/9/2022

Exercice n° 1

— Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}}$.

— Pour démontrer la formule, plusieurs options : par récurrence ou en multipliant la somme par $1-z$ et en faisant apparaître deux sommes téléscopiques.

Exercice n° 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : On a : $\dfrac{6^3 \times 12^{-4}}{4^2 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^3 \times 2^3 \times 3^{-4} \times 2^{-8}}{2^4 \times 2^{-5}} = \dfrac{3^{-1}}{2^4}\ \boxed{= \dfrac{1}{48}}$.

Question 2 : On a : $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}(3^3 - 3^2 - 7 \times 3 + 5)\ \boxed{= 2 \times 3^{n-1}}$.

Question 3 : On a : $\dfrac{U\sqrt{7}+2}{\pi} = U + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow U\left(\dfrac{\sqrt{7}}{\pi} - 1\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{\pi} \Leftrightarrow U = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi}}{\frac{\sqrt{7}}{\pi} - 1} \Leftrightarrow \boxed{U = \dfrac{\pi - 6}{3\sqrt{7} - 3\pi}}$.

Question 4 : On interprète la valeur absolue comme une distance : $|2x+3| = |2x-(-3)|$ est la distance entre le réel $2x$ et (-3).

On en déduit que $|2x+3| = \pi \Leftrightarrow 2x \in \{-3-\pi; -3+\pi\} \Leftrightarrow \boxed{x \in \left\{\dfrac{-3-\pi}{2}; \dfrac{-3+\pi}{2}\right\}}$.

Question 5 : On interprète chaque valeur absolue comme une distance.

— $|x+3| = |x-(-3)|$ est la distance entre le réel x et (-3).

— $|x-\pi|$ est la distance entre le réel x et π.

Résoudre l'équation $|x+3| = |x-\pi|$ c'est trouver tous les réels équidistants de (-3) et π. On a donc une seule solution : $\boxed{x = \dfrac{-3+\pi}{2}}$.

Question 6 : On a $x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1) \leq 0$.

On construit le tableau de signes de $f(x) = (x-2)(x+1)(x-1)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{x^3 - 2x^2 \leq x - 2 \Longleftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; 2]}$.

Exercice n° 3

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Or, $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on en déduit que les valeurs interdites sont 1 et 3 et que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{1; 3\}}$.
2. f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{(-2x+8)(x^2-4x+3) - (-x^2+8x-12)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+18x-24}{(x^2-4x+3)^2} = \boxed{-2\frac{2x^2-9x+12}{(x^2-4x+3)^2}}.$$
3. f est strictement monotone sur les intervalles inclus dans $\mathcal{D}$ sur lesquels f' est de signe constant.
Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f'(x)$ a le signe opposé de $P(x) = 2x^2 - 9x + 12$. P a pour discriminant $\Delta = -15 < 0$, on en déduit que P est strictement positif et donc que f' est strictement négative.
Il suit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; 1[,\ ]1; 3[\text{ et }]3; +\infty[}$.

4. Etudions les limites de $f(x)$ aux bornes de $\mathcal{D}$.
   — <u>Bornes infinies :</u> Pour $x \in \mathcal{D}\backslash\{0\}$, on a $f(x) = \frac{-x^2+8x-12}{x^2-4x+3} = \frac{-1+\frac{8}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{12}{x^2} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2} = 1$. Par quotient, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$.
   De façon analogue, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$.
   — <u>Bornes finies :</u> déterminons les limites du dénominateur et du numérateur en 1^-, 1^+, 3^- et 3^+.
   x^2-4x+3 est une fonction polynômiale de degré 2 qui s'annule en 1 et 3, sa parabole représentative est orientée vers le haut, on en déduit :

$$\lim_{x\to1^-} x^2-4x+3 = 0^+ \;;\; \lim_{x\to1^+} x^2-4x+3 = 0^- \;;\; \lim_{x\to3^-} x^2-4x+3 = 0^- \;;\; \lim_{x\to3^+} x^2-4x+3 = 0^+$$

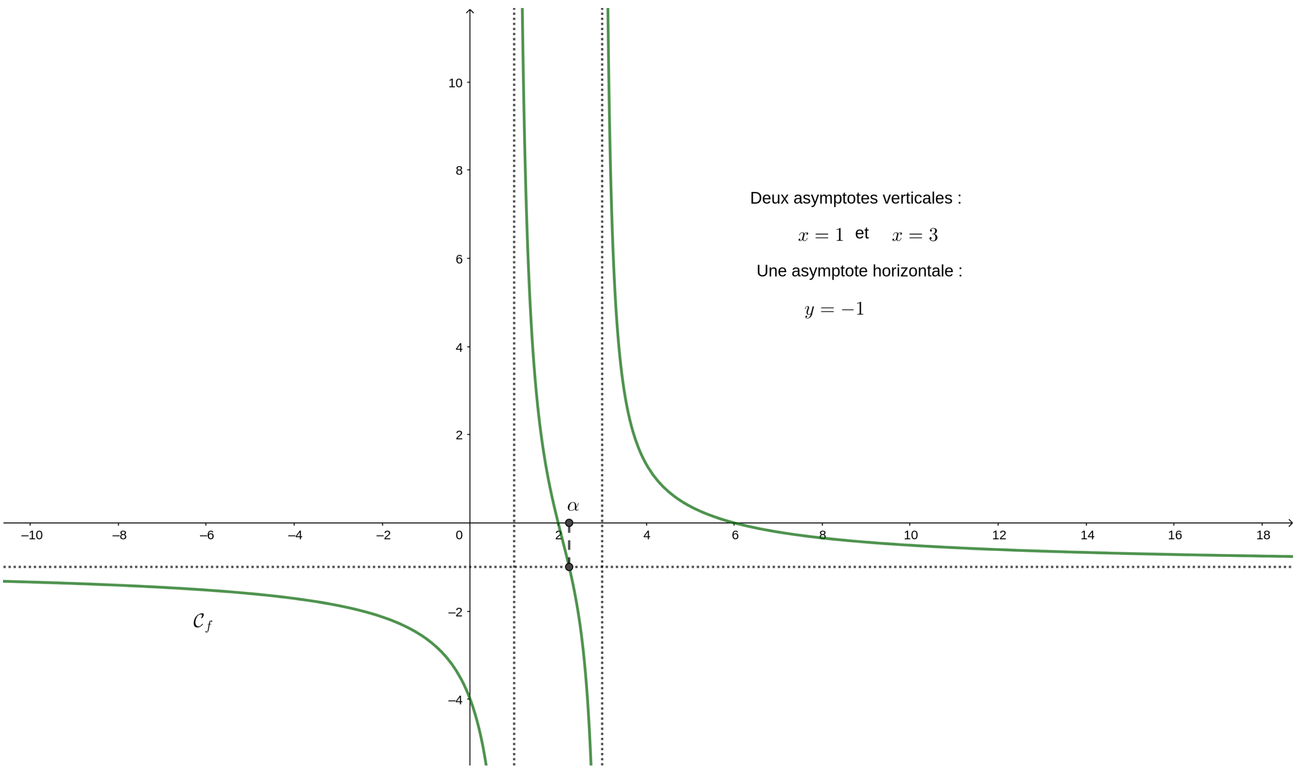
   Le numérateur $-x^2+8x-12$ est continu sur $\mathbb{R}$ et donc $\lim\limits_{x\to1} -x^2+8x-12 = -(1^2)+8-12 = -5$ et de façon analogue $\lim\limits_{x\to3} -x^2+8x-12 = 21$. On peut donc donner toutes les limites par opérations :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty}$$

5. Dressons le tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1

   On trace la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



Exercice n° 4

La fonction f est polynômiale, elle est donc définie et dérivable sur $[0;1]$. On a :

$$\forall x \in [0;1],\;\; f'(x) = nx^{n-1}(1-x)^p - px^n(1-x)^{p-1} = x^{n-1}(1-x)^{p-1}(n-(n+p)x)$$

Pour tout réel x dans $[0;1]$, $x \geq 0$ et $1-x \geq 0$ donc $x^{n-1}(1-x)^{p-1} \geq 0$ et il suit que $f'(x)$ a le même signe que $n-(n+p)x$, qui est une fonction affine décroissante. On déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{n}{n+p}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{n}{n+p})$	$\searrow$	0

$\boxed{\text{On déduit que } f \text{ admet pour minimum } 0 \text{ et pour maximum } f(\frac{n}{n+p}) = \frac{n^n p^p}{(n+p)^{n+p}}}$ (après calculs).

Exercice n° 5

Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que $5^n \geq 4^n + 3^n$.

- **Initialisation pour** $n = 2$:
  D'une part, $5^n = 5^2 = 25$ et d'autre part $4^n + 3^n = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Ces deux nombres sont égaux, on a donc bien $5^n \geq 4^n + 3^n$ pour $n = 2$.
- **Hérédité** :
  Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie, c'est-à-dire tel que $5^n \geq 4^n + 3^n$.
  Montrons que la propriété est alors aussi vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$.

  On a : $5^n \geq 4^n + 3^n \iff 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n$: ($\clubsuit$).

  Or, $5 \times 4^n > 4 \times 4^n$ et $5 \times 3^n > 3 \times 3^n$ donc, avec ($\clubsuit$) on obtient :

  $$5^{n+1} \geq 4 \times 4^n + 3 \times 3^n \iff 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}.$$

  Finalement, la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion** :
  $\boxed{\text{La propriété a été initialisée pour } n = 2\text{, elle est héréditaire et donc vraie pour tout entier naturel } n \geq 2}$.

Exercice n° 6

1. On a : $\forall (x;y) \in [1;+\infty[^2,\ \geq 1,\ x + y \leq 1 + xy \Leftrightarrow 0 \leq 1 + xy - x - y \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)(1-y)$.
   Cette dernière inégalité est vraie car $1-x$ et $1-y$ sont des réels négatifs, leur produit est donc positif.
   Finalement, on a bien : $\boxed{\forall (x;y) \in [1;+\infty[^2,\ x + y \leq 1 + xy}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des réels appartenant à $[1;+\infty[$.
   On rappelle que le produit $a_1 \times a_2 \times a_n$ se note $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$.

   (a) On a :

   $$\begin{aligned}
   \left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + a_{n+1}) &= 1 + a_{n+1} + \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n+1} a_i && \text{(on développe)} \\
   &\leq 1 + 1 + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n+1} a_i && \text{(avec le 1.)} \\
   &\leq 1 + 1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i + \prod_{i=1}^{n+1} a_i && \text{(on intègre } a_{n+1} \text{ au produit)} \\
   &\boxed{\leq 2\left(1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)} && \text{(on factorise)}
   \end{aligned}$$

(b) On raisonne par récurrence sur n.

<u>Initialisation pour $n = 1$:</u>

On a : $\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) = 1 + a_1$ et $2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right) = 2^0(1 + a_1) = 1 + a_1$, l'inégalité est donc vraie.

<u>Hérédité :</u>

supposons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)$ soit vraie et montrons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) \leq 2^{n}\left(1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\right)(1 + a_{n+1}) && \text{(on scinde le produit)}\\
&\leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + a_{n+1}) && \text{(d'après l'HDR)}\\
&\leq 2^{n}\left(1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) && \text{(question précédente)}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u>

$$\boxed{\text{L'inégalité est initialisée pour } n = 1, \text{ elle est héréditaire donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leq 2^{n-1}\left(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\right)}.$$