PCSI — Mathématiques - Devoir Surveillé 2 — 10/10/2020

2 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Pour $z \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^2 = 5 - \mathrm{i}$.

Question 2 : Pour $z \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0$.

Question 3 : Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{2y}{1+x^2}$ avec la condition $y(1) = 3$.

Question 4 : Calculer les trois intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \ln(t+2) \, \mathrm{d}t$$

(Pour I_2, on pourra utiliser des formules de trigonométrie).

Exercice n° 2

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Exercice n° 3

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}(x) + 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Problème : fonction argument cosinus hyperbolique

On rappelle que les fonctions ch et sh sont définies de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Préliminaires :

a) Rappeler l'expression de ch′ ainsi que la relation qui relie ch^2 et sh^2.
b) Justifier que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I à préciser.

On appelle **argument cosinnus hyperbolique** la fonction réciproque de $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^+}$ et on la note argch. L'objectif de ce problème est d'étudier cette fonction et d'en donner quelques propriétés.

1. Dans un repère orthonormé, donner l'allure des courbes représentatives de ch et argch.
2. Justifier que argch n'est pas dérivable sur I entier puis, prouver que sur l'intervalle de dérivation de argch on a :
$$\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
3. Dresser le tableau de variation complet de argch.
4. Résoudre $\mathrm{ch}\, x = 2$ et donner la valeur de argch(2).
5. En s'inspirant de la question précédente, donner une expression de argch(y) en fonction de y, à l'aide des fonctions usuelles.