Correction du DS2 de mathématiques, proposé le 10/10

Exercice n° 1

Question 1 : Il s'agit de trouver les racines carrées complexes de $5-\mathrm{i}$, on sait qu'il en existe exactement deux et qu'elles sont opposées. Cherchons-les sous forme algébrique.

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a : $(\star)\ :\ z^2 = 5-\mathrm{i} \iff \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=-1 \end{cases}$.

En considérant l'égalité des modules dans $(\star)$ on obtient $a^2+b^2=\sqrt{26}$ et, comme cette équation est une conséquence de $(\star)$, on peut la rajouter dans le système qui devient : $\begin{cases} a^2-b^2=5 \\ a^2+b^2=\sqrt{26} \\ 2ab=-1 \end{cases}$.

En additionnant les deux premières équations il vient $a^2 = \frac{5+\sqrt{26}}{2} \iff a = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{26}}{2}}$.

On obtient b grâce à la dernière équation : $b = \frac{-1}{2a}$.

$\boxed{\text{Finalement, les racines carrées de } 5-\mathrm{i} \text{ sont } \sqrt{\frac{5+\sqrt{26}}{2}} + \mathrm{i}\frac{-1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{26}}{2}}} \text{ et } -\sqrt{\frac{5+\sqrt{26}}{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{26}}{2}}}}$.

Question 2 : On doit résoudre une équation du second degré qui n'a pas de solution évidente, on calcule donc son discriminant $\Delta = 9-4(3-\mathrm{i}) = -3+4\mathrm{i}$. Une des racines carrées de Δ est (après calculs) $\delta = 1+2\mathrm{i}$, on en déduit que : $\boxed{z^2-3z+3-\mathrm{i}=0 \text{ a pour solution } \{1-\mathrm{i};2+\mathrm{i}\}}$.

Question 3 : $(E)\ :\ y' = \frac{2y}{1+x^2} \iff y - \frac{2y}{1+x^2} = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. On pose $a(x) = \frac{-2}{1+x^2}$ et alors $A(x) = -2\mathrm{Arctan}(x)$ est une primitive de a.

Il suit que $\underline{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{2\mathrm{Arctan}(x)} / \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$.

On cherche les éléments de $\mathcal{S}$ qui vérifient $y(1)=3$. Soit $y(x) = \lambda\mathrm{e}^{2\mathrm{Arctan}(x)}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

On a $y(1) = \lambda\mathrm{e}^{2\mathrm{Arctan}(1)} = \lambda\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$ et donc $y(1)=3 \iff \lambda\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} = 3 \iff \underline{\lambda = 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}$.

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E) \text{ qui vérifie } y(1)=3 \text{ est la fonction } y(x) = 3\mathrm{e}^{2\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}}}$.

Question 4 : On a :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = [\ln(|\ln x|)]_2^3 = [\ln(\ln x)]_2^3 = \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) \boxed{= \ \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}$$

$$I_2 = \int_0^\pi \cos^2 x \ \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)+x\right]_0^\pi \boxed{= \ \frac{\pi}{2}}.$$

On a $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \ln(t+2)\mathrm{d}t$. On procède par parties, en posant $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln(t+2) \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t)=t+2 \\ v'(t)=\frac{1}{t+2} \end{cases}$.

Il vient alors : $I_3 = [(t+2)\ln(t+2)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 1 \ \mathrm{d}t \boxed{= \ 3\ln(3)-2\ln(2)-1}$.

Exercice n° 2

Démontrons par récurrence sur $n\geq 2$ que $\displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Initialisation pour $n=2$:

D'une part on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^2 \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} = \frac{1}{6}$ et d'autre part on a : $\dfrac{n^2+n-2}{4n(n+1)} = \dfrac{2^2+2-2}{4\times 2(2+1)} = \dfrac{1}{6}$.

<u>La propriété est donc initialisée pour $n=2$.</u>

Hérédité :

Supposons la propriété vérifiée au rang $n\geq 2$, c'est-à-dire $(HDR)\ :\ \displaystyle\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$.

Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$ c'est-à-dire $(OBJ)\ :\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{(n+1)^2+n-1}{4(n+1)(n+2)}$.

$$
\begin{aligned}
\text{On a : } \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)^2-1)} \\
&= \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)n(n+2)} \\
&= \frac{(n^2+n-2)(n+2)+4}{4n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^3+3n^2}{4n(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

Or, le numérateur du membre de droite de (OBJ) est $(n+1)^2+n-1 = n^2+3n$, on a bien réussi à prouver la propriété au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété a été initialisée au rang $n=2$, elle est héréditaire, on a donc bien :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}}$$

Exercice n° 3

Soit la fonction $f(x) = \text{Arctan}(x) + 2\text{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x)$.
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2}{2x^2+2-2x\sqrt{1+x^2}} \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1-x\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

Pour simplifier les notations, notons $A = \sqrt{1+x^2}$. On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^2-xA} \times \frac{x-A}{A} = \frac{1}{A^2} + \frac{x-A}{A^2(A-x)} = \frac{A-x+x-A}{A^2(A-x)} = 0$$

On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$ et vaut donc $f(0) = 2\text{Arctan}\ 1 = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\sqrt{1+x^2}-x) = \frac{\pi}{2}}$.

Problème : fonction argument cosinus hyperbolique

On rappelle que les fonctions ch et sh sont définies de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch } x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh } x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Préliminaires :

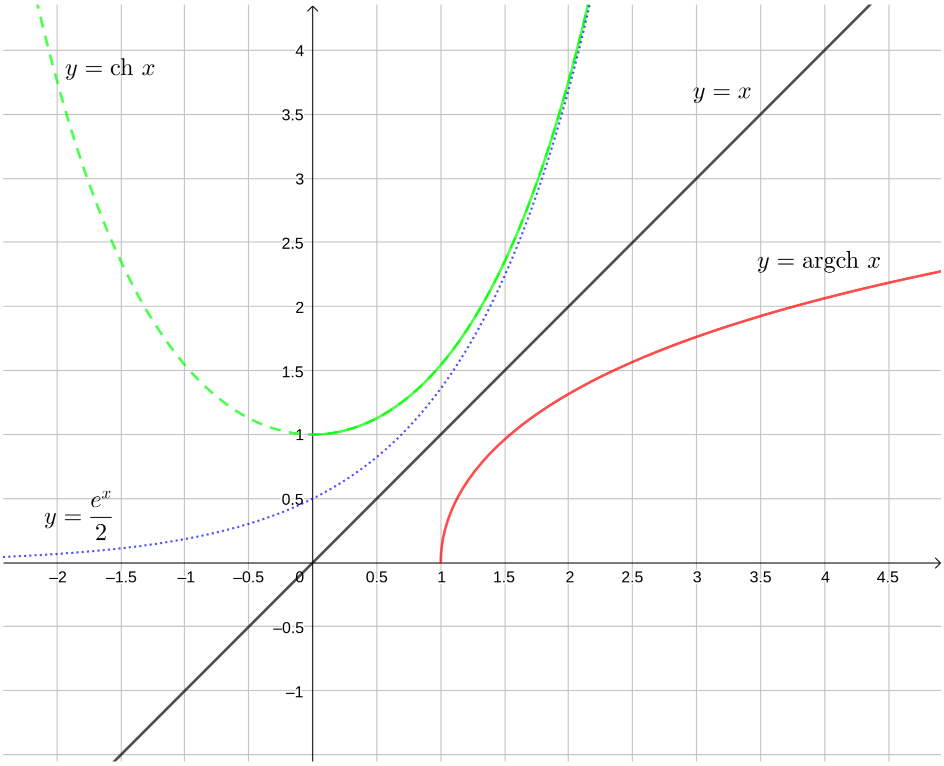
a) ch est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\boxed{\text{ch}' = \text{sh}}$. De plus, $\boxed{\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1}$.

b) ch est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $\text{ch}(\mathbb{R}^+)$.
Puisque ch est croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\text{ch}(\mathbb{R}^+) = [\text{ch}(0); \lim_{x\to+\infty} \text{ch } x[= [1; +\infty[$, par continuité.

Finalement, $\boxed{\text{ch réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } [1;+\infty[}$.

Etude de argch

1. Dans un repère orthonormé, puisque Argch est la réciproque de la restriction de ch à $\mathbb{R}^+$ alors la courbe de Argch se déduit de celle de la partie droite de celle de ch (c'est-à-dire pour $x \geq 0$) par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a :



2. $y = \text{ch } x$ admet une tangente horizontale en $(0;1)$, il suit que $y = \text{argch } x$ admet une tangente verticale en $(1;0)$ et donc argch n'est pas dérivable en 1.
Pour tout $x > 0$, $\text{ch}'(x) = \text{sh}x > 0$ ce qui signifie que $y = \text{ch } x$ admet une tangente non horizontale au point d'abscisse x. Par symétrie, $y = \text{argch } x$ admet une tangente non verticale en tout point d'abscisse $\text{ch } x$. Autrement dit : $\boxed{\text{argch est dérivable sur } I =]1;+\infty[}$.
$\forall x \in I,\ \text{ch} \circ \text{argch } (x) = x \implies \text{ch}' \circ \text{argch}(x) \times \text{argch}'(x) = 1 \ : (\star)$.
Comme ch' ne s'annule pas (on l'a justifié précédemment), on a : $(\star) \iff \text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}' \circ \text{argch}(x)}$.
Or, on l'a rappelé dans les préliminaires :$\text{ch}' = \text{sh}$, on a donc $\text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\text{sh} \circ \text{argch}(x)}$.
Puis, en remarquant $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \iff \text{sh}^2 = \text{ch}^2 - 1$ et en notant que $y \geq 0 \implies \text{sh } y \geq 0$ et donc $\text{sh } y = \sqrt{\text{ch}^2 - 1}$ on a $\forall x > 1,\ \text{argch } x > 0$ et donc $\text{sh}(\text{argch } x) = \sqrt{\text{ch}^2(\text{argch } x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Finalement, $\boxed{\forall x > 1,\ \text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$.
Remarquez que le travail pouvait être de mené de façon uniquement analytique : la non-dérivabilité de argch *en* $1 = \text{ch}(0)$ *est dûe à l'annulation de* $ch' = sh$ *qui rend* $(\star)$ *impossible.*

3. Le tableau de variation complet de argch :

x	1	$+\infty$
$\text{argch}'(x)$	‖	$+$
argch	0 ↗	$+\infty$

4. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch } x = 2 \iff \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 2 \iff \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 4 \ : (E)$. Posons $X = \mathrm{e}^x$ et alors (E) devient $X + \frac{1}{X} = 4 \iff X^2 - 4X + 1 = 0 \ : \ (\widehat{E})$ (possible car $X > 0$).
$(\widehat{E})$ est une équation du second degré dont les deux solutions réelles sont $X_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $X_2 = 2 + \sqrt{3}$.
Repassons à x : $X = X_1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3})$ et $X = X_2 \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3})$.
argch(2) est l'unique antécédent positif de 2 par ch, on a donc : $\boxed{\text{argch}(2) = \ln(2 + \sqrt{3})}$.

5. De façon analogue, pour tout $y \geq 1$, $\mathrm{argch}(y)$ est l'unique solution positive de $\mathrm{ch}\, x = y$.
On a : $\mathrm{ch}\, x = y \iff \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = y \iff \mathrm{e}^x - 2y + \mathrm{e}^{-x} = 0$. On pose $X = \mathrm{e}^x$ et alors l'équation devient $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4(y^2 - 1)$ qui est positif car $y \geq 1$ et donc $X \in \{y + \sqrt{y^2 - 1}; y - \sqrt{y^2 - 1}\}$.
On a $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \leq y + \sqrt{y^2 - 1}$, on peut donc appliquer ln qui est strictement croissante et il vient $x \in \{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}); \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})\}$ puis, en conservant la solution positive : $\boxed{\mathrm{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})}$.

Dans $0 < y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \leq y + \sqrt{y^2 - 1}$, une seule des inégalités n'est pas évidente. Laquelle ? Comment la justifier ?