# PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 2, proposé le 12/10/2019

**Exercice n° 1**

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{D}_f = ]-\infty; -3] \cup ]1; +\infty[}$.

2. $g(x)$ existe si, et seulement si, $\sin(x^2) + 2 > 0$. Or, pour tout réel $x$, $\sin(x^2) \geq -1$ ce qui entraîne $\sin(x^2) + 2 > 0$, le domaine de définition de $g$ est donc $\mathbb{R}$. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(x^2)+2\right)}{\sin(x^2)+2} = \boxed{\frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)+2}}.$$

3. $(x+2)^{\sqrt{3}}$ signifie $\mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln(x+2)}$, cette expression a du sens si, et seulement si, $x > -2$.
On a : $\forall x \in ]-2; +\infty[,\ (x+2)^{\sqrt{3}} = \pi \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln(x+2)} = \pi \Leftrightarrow \sqrt{3}\ln(x+2) = \ln(\pi) \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln(\pi)}{\sqrt{3}}\right) - 2$.
Ce nombre est supérieur à $-2$ (car exp prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$), on en déduit que :
$\boxed{\text{l'équation a pour unique solution } \exp\left(\frac{\ln(\pi)}{\sqrt{3}}\right) - 2}$.

4. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $z^2 = 5 - 3\mathrm{i} \Longleftrightarrow a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 5 - 3\mathrm{i} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & : (1) \\ 2ab = -3 & : (2) \end{cases}$.
L'équation $z^2 = 5 - 3\mathrm{i}$ implique $|z^2| = |5 - 3\mathrm{i}|$ qui est équivalente à $a^2 + b^2 = \sqrt{34}\ : (3)$.
En additionnant (1) et (3) il vient $2a^2 = 5 + \sqrt{34} \Longleftrightarrow a \in \left\{\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}; -\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}\right\}$.
L'équation (2) nous donne la valeur de $b$ : $(2) \Longleftrightarrow b = \frac{-3}{2a}$.
On a trouvé deux valeurs possibles pour que $z = a + \mathrm{i}b$ soit racine carrée de $5 - 3\mathrm{i}$. Or, $5 - 3\mathrm{i} \neq 0$ donc le cours nous assure que ce nombre a deux racines carrées distinctes, qui sont donc forcément les deux nombres complexes qu'on a trouvé. *(Ce qui nous dispense de vérifier que ces nombres conviennent).*
$\boxed{\text{Finalement, les racines carrées de } 5 - 3\mathrm{i} \text{ sont } \sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}} + \mathrm{i}\frac{-3}{2\sqrt{\frac{5+\sqrt{34}}{2}}} \text{ et son opposé.}}$

5. On cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec une une condition initiale.
— **Résolution de l'équation homogène** : $2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0$ a pour solution $\left\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{t/2}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

— **Recherche d'une solution particulière** : on cherche une fonction de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-5t}$ avec $k$ un réel à déterminer. $f$ est solution de $2y' - y = 3\mathrm{e}^{-5t}$ si, et seulement si, $2f' - f = 3\mathrm{e}^{-5t}$. On a :
$$2f' - f = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow -10k\mathrm{e}^{-5t} - k\mathrm{e}^{-5t} = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow -11k\mathrm{e}^{-5t} = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{11}.$$
Finalement, $f(t) = -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

— **La solution générale de l'équation différentielle est** : $\left\{t \mapsto -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \lambda \mathrm{e}^{t/2}\ /\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

— **Condition initiale** : soit une fonction $y(t) = -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \lambda \mathrm{e}^{t/2}$, avec $\lambda$ un réel à déterminer.
$y(t)$ vérifie $y(0) = 7$ si, et seulement si, $-\frac{3}{11} + \lambda = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{80}{11}$.
$\boxed{\text{Finalement, la fonction cherchée est : } t \longmapsto -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \frac{80}{11}\mathrm{e}^{t/2}.}$

6. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$.
— **Initialisation :** pour $n = 0$, on a d'une part $5(-1)^{n+1} = 5(-1)^1 = -5$.
D'autre part, puisque $u_2 = u_1 + u_0 = 3$, on a : $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_1^2 - u_0 u_2 = 1^2 - 2 \times 3 = -5$.
Finalement, la propriété est vraie pour $n = 0$.
— **Hérédité :** supposons que la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$.
Montrons qu'elle est également vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+2}^2 - u_{n+1}u_{n+3} = 5(-1)^{n+2}$. On a :
$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 - u_{n+1}u_{n+3} &= u_{n+2}^2 - u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) \\ &= u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 - u_{n+1}u_{n+2} \end{aligned}$$

Or, $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2 = (u_{n+2}+u_{n+1})(u_{n+2}-u_{n+1}) = (u_{n+2}+u_{n+1})u_n$ donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+2}^2 - u_{n+1}u_{n+3} &= (u_{n+2}+u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n+1}+u_n)\\
&= u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2\\
&= -\left(u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}\right) \qquad \text{(on utilise l'HDR)}\\
&= -5(-1)^{n+1}\\
&= 5(-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{la propriété est initialisée pour } n=0\text{, elle est héréditaire donc vraie pour tout } n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice n° 2**

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $1-\mathrm{e}^x \neq 0$. On a donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}^*}$.
2. (a) $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 : si $x\in\mathcal{D}$ alors $-x\in\mathcal{D}$. On a :

$$\forall x\in\mathcal{D},\ f(x)+f(-x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{\mathrm{e}^x-1}{1-\mathrm{e}^x}\boxed{=-1}.$$

   (b) Soit $x<0$. Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x$ est $(x;f(x))$. Or $f(x) = -f(-x)-1$. Si on connait $\mathcal{C}$ pour les abscisses strictement positives, alors on connait le point $(-x;f(-x))$. Par symétrie de centre $O$ on obtient $(x;-f(-x))$ puis, en translatant par le vecteur $-\vec{j}$ on a $(x;-f(-x)-1) = (x;f(x))$.

   $\boxed{\text{On obtient l'autre partie de la courbe par une symétrie de centre } O \text{ puis translation de vecteur } -\vec{j}}$.

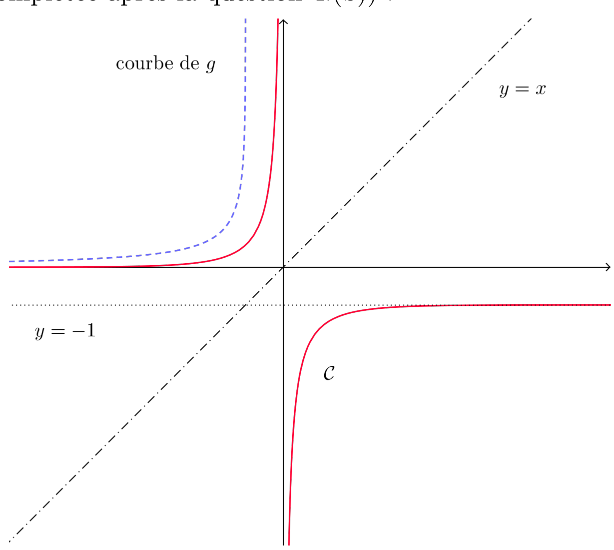
3. (a) — **Variations :** $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a : $\forall x\in\mathcal{D}, f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)+(\mathrm{e}^x)^2}{(1-\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2} > 0$.
   On en déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et sur $\mathbb{R}^{-*}$).

   — **Limites :** on doit déterminer les limites de $f$ en $0^+$ et en $+\infty$.
   En $0^+$ : $\mathrm{e}^x \to 1^+$ donc $1-\mathrm{e}^x \to 0^-$ et, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
   En $+\infty$ : $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et on a une F.I. Or, $\forall x\in\mathcal{D}, f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

   — **Tableau de variations :** (on commence sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis on déduit sur $\mathbb{R}^{-*}$)

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ |

   (b) La figure obtenue (et complétée après la question 4.(b)) :



4. (a) $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur son image. $f$ étant continue, $f(\mathbb{R}^{+*})$ est un intervalle et, d'après le tableau de variations, $f(\mathbb{R}^{+*}) = ]-\infty; -1[$.
   $\boxed{\text{Finalement, } f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^{+*} \text{ vers } I = ]-\infty; -1[.}$

   (b) Sur la figure précédente, la courbe de $g$ a été déduite de la partie de $\mathcal{C}$ correspondant aux abscisses strictement positives par symétrie d'axe $y = x$.

5. (a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} = f(x) + f^2(x) = \frac{e^x(1-e^x)+e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2} \boxed{= f'(x)}$.

   (b) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'$ ne s'annule jamais, $g$ est donc dérivable sur $I$.
   De plus, $\forall x \in I,\ f \circ g(x) = x$. On dérive cette expression et il vient, pour tout $x \in I$ :

$$f' \circ g(x) \times g'(x) = 1 \iff g'(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)}.$$

   On utilise la question précédente : $\forall x \in I,\ f' \circ g(x) = (f + f^2) \circ g(x) = f(g(x)) + f^2(g(x)) = x + x^2$.
   $\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in I,\ g'(x) = \frac{1}{x + x^2}.}$

6. Pour tout $y \in I$, il existe un unique $x > 0$ tel que $y = f(x) \iff x = g(y)$. On a :

$$y = f(x) \iff y = \frac{e^x}{1 - e^x} \iff y(1 - e^x) = e^x \iff y = e^x(1 + y) \iff x = \ln\left(\frac{y}{1+y}\right).$$

   (Il était possible d'appliquer ln car $y < -1 \Longrightarrow \frac{y}{1+y} > 0$).

   On en conclut que $\boxed{\text{pour tout } y \in I,\ g(y) = \ln\left(\frac{y}{1+y}\right)}$.

**Exercice n° 3**

1. On travaille pour $x > 0$ on a donc $(H) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions de $(H)$ est : $\left\{x \mapsto \lambda e^{\ln x} / \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{\{x \mapsto \lambda x / \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

2. On utilise la méthode de la variation de la constante : cherchons une solution particulière de $(E)$ qui soit de la forme $f(x) = x\lambda(x)$, avec $\lambda$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On a :

$$xf'(x) - f(x) = \operatorname{Arctan}(x) \iff x(\lambda(x) + x\lambda'(x)) - x\lambda(x) = \operatorname{Arctan}(x) \iff \lambda'(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}.$$

   $\boxed{\text{Finalement, si on connait une primitive de } x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} \text{ on en déduira une solution particulière de } (E)}$.

3. $F$ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On a, pour tout $x \in ]0; +\infty[$ :

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}\right) = F'(x) - \left(-\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x^2)}\right) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2}.$$

   $\boxed{\text{Finalement, } x \mapsto F(x) - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} \text{ est bien une primitive de } x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} \text{ sur } ]0; +\infty[}$.

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $x \in ]0; +\infty[$ on a : $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{1 + x^2} = \frac{x^2(\alpha + \beta) + \gamma x + \alpha}{x(1 + x^2)}$.
   On en déduit :

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{1 + x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \frac{x^2(\alpha+\beta) + \gamma x + \alpha}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

   $\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in ]0; +\infty[ \text{ on a : } \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.}$

5. Sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$, c'est donc une fonction $F(x)$ qui convient.

   On peut modifier l'expression de cette fonction : $\forall x \in ]0; +\infty[,\ F(x) = \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \boxed{\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}$.

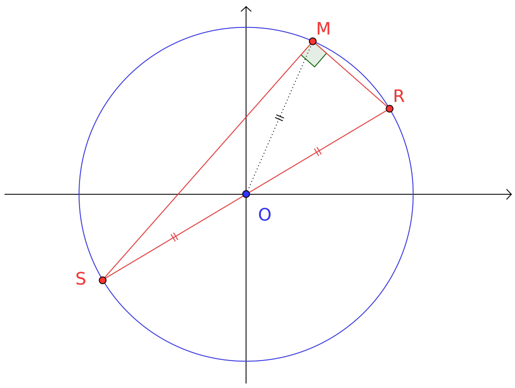
6. On déduit des questions précédentes que $x \mapsto \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - -\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$ convient pour $\lambda(x)$. Une solution particulière de $(E)$ est donc $x\lambda(x)$ et il suit que la solution générale de $(E)$ est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto x\left(\lambda + \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

**Exercice n° 4**

— Commençons par nous assurer que $MRS$ est bien un triangle, autrement dit : que les points sont distincts. $r$ et $s$ sont les racines de $z$, on a donc $r = -s$. Or $z \neq 0$ donc $r \neq s$ ce qui équivaut à $R \neq S$.
Par ailleurs, $R = M \iff r = z \iff r = r^2 \iff r \in \{0;1\}$. $r \neq 0$ car $z \neq 0$, reste le cas $r = 1$ qui implique $z = 1$. Si $z = 1$ alors $\{r, s\} = \{-1;1\}$ et $MRS$ n'est pas un triangle.

— Dorénavant, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0;1\}$ et $MRS$ est bien un triangle.




$MRS$ est rectangle en $M$ si, et seulement si, $M$ est sur le cercle dont un diamètre est $[RS]$, notons $\mathcal{C}$ ce cercle. On a $r = -s$ donc le milieu de $[RS]$ est l'origine du repère $O$. $O$ est donc le centre de $\mathcal{C}$ et son rayon est $OR = OS = |r|$. On a : $M \in \mathcal{C} \iff OM = |r| \iff |z| = |r| \iff |r|^2 = |r| \iff |r| \in \{0;1\}$.
$|r| = 0$ est exclu donc $M \in \mathcal{C} \iff |r| = 1 \iff |z| = 1$. On conclut :

$\boxed{MRS \text{ est rectangle en } M \text{ si, et seulement si, } M \text{ est sur le cercle trigonométrique privé de } A(1).}$