3 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez indiqué sur la copie seront valorisées, même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^2 + 2\mathrm{i}z - 1 = 0$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = -x^2 \ln x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Question 3 : Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 3t + 1$ avec les conditions $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$.

Question 4 : Calculer les trois intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x \qquad ; \qquad I_3 = \int_0^1 (t+3)\mathrm{e}^{1-2t}\,\mathrm{d}t$$

Question 5 : A l'aide d'un changement de variable, calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\text{Arcsin } x}{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice n° 2

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$.

1. Etudier la parité de f puis faire son étude complète.
2. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle I à préciser.
   On note $f^{-1} : I \to \mathbb{R}^+$ la bijection réciproque de $f : I \to \mathbb{R}$.
3. Soit $y \in I$. Déterminer une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y.

Problème

L'objectif de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle :

$$(E) : \; y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln x$$

I. **Préliminaires**.

1. Comment qualifier l'équation (E) ? Fait-elle partie des équations différentielles qu'on sait résoudre en appliquant directement le cours ?
2. a) Trouver des réels $a,\ b$ et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

   b) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Donner une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto x\ln x$.
4. Donner une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto (1-x^2)\ln x$.

II. **Résolution de l'équation homogène** $(E_h) : \; y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0$.

1. Prouver que $x \mapsto x$ est une solution de (E_h).
2. Soit $y : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. On définit une nouvelle fonction z, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x}$.

   a) Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ des expressions de $z'(x)$ et de $z''(x)$.

   b) Prouver que z' est solution de l'équation différentielle $(\widehat{E}) : \; xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$ si, et seulement si, y est solution de (E_h).
3. Après avoir décrit en une phrase la nature de $(\widehat{E})$, la résoudre.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E_h).

III. **Résolution de** (E).

1. On va adapter la méthode de la variation de la constante à l'ordre 2. On cherche une solution particulière de (E) de la forme $f(x) = \lambda(x)(x^2-1) + \mu(x)x$ avec λ et μ des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ auxquelles on impose la condition :

   $$(C_1) : \; \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; (x^2-1)\lambda'(x) + x\mu'(x) = 0$$

   a) Calculer des expressions de f' et f'' en fonction de λ, μ et leurs dérivées.

   b) Prouver que f est solution de (E) si, et seulement si :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \; 2x\lambda'(x) + \mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) \quad : (C_2)$$

   c) A l'aide de (C_1) et (C_2), déterminer λ' et μ', en déduire une solution particulière de (E).
2. Donner l'ensemble des solutions de (E).