2 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel : Ex1 : 9 points ; Ex2 : 9 points ; Problème : 18 points
1 point pour l'aspect de la copie ; 1 point pour encadrer les résultats ; 1 point pour utiliser correctement les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, 1 point pour utiliser $\forall$.

Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : En utilisant la forme algébrique, trouver une racine carrée complexe de $7 - \mathrm{i}$.

Question 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\sin(5x) - \sin(x)$ avec la technique de l'angle moitié.

Question 3 : Donner le domaine de définition de $f(x) = \operatorname{Arcsin}(1 + \ln x)$.

Question 4 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^4(x)$.

Question 5 : Calculer la valeur exacte de $S = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=6}^{103} \frac{1}{k-1}$.

(On mettra le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice n° 2

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right)$$

L'objectif de cet exercice est de prouver $f = g$.

1. Justifier que f et g sont définies et dérivables sur un même domaine $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer f' et g'.
3. Rappeler et démontrer la relation entre ch^2 et sh^2.
4. En déduire que $f' = g'$.
5. Conclure.

Problème : des équations polynômiales

Pour tout $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n)\ :\ z^n + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

I) **Cas** $n = 2$

1. Résoudre l'équation (E_2).
2. Vérifier que les solutions trouvées ont toutes des modules strictement inférieurs à 2.

II) **Cas** $n = 3$

1. On note f la fonction définie pour tout réel t par $f(t) = t^3 + t + 1$. Faire l'étude de la fonction f.
2. En déduire que (E_3) admet une unique solution réelle r et que $r \in]-1; -\frac{1}{2}[$.
3. On note z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E_3) qu'on ne cherchera pas à calculer.
   Le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ se factorise donc sous la forme :
   $$P(X) = (X - r)(X - z_1)(X - z_2).$$
   En déduire que $z_1 + z_2 = -r$ et $z_1 z_2 = -\frac{1}{r}$.
4. Justifier l'encadrement strict : $\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1$.
   De même, donner un encadrement de $|z_1 z_2|$.
5. Si on suppose $|z_1| \geq 2$, que peut-on affirmer pour $|z_2|$?
6. Rappeler l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$. Justifier $|z_1| < 1 + |z_2|$, puis aboutir à une contradiction.
7. Montrer que toutes les solutions de (E_3) ont des modules strictement inférieurs à 2.

III) **Généralisation :** $n \geq 2$ **quelconque**

1. Soit $n \geq 2$. Faire l'étude complète de $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [2; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n - t - 1 \end{array} \right.$. On précisera le signe de φ.
2. Prouver que, pour $z \in \mathbb{C}$ on a :
   $$(z^n + z + 1 = 0) \implies (|z| < 2)$$
3. Discuter l'implication réciproque.