3 heures

- Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème. Vous les traiterez dans l'ordre de votre choix mais d'un seul tenant.
- Les questions de l'exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.
- Le barême comptera 1 point qui sera attribué aux élèves qui auront utilisé les quantificateurs de façon satisfaisante.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à **encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

1. Linéariser $\sin^5 x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre $y'' + 4y = 1$ avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 5$.

3. Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$. Que vaut u_{2019} ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i-1}$.

5. On considère l'ensemble $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - 3 + \mathrm{i}| < 1\}$.
   Que dire du module et de l'argument d'un élément de Λ ?

Problème

L'objectif de ce problème est de calculer l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales de Wallis qu'on présentera dans une première partie.

Partie A : Intégrales de Wallis

> **Définition**
> Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$ est appelée intégrale de Wallis d'indice n et notée W_n.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Etudier les variations de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
5. En déduire que, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on précisera la valeur de cette constante.
6. Déduire de la question précédente la limite de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. En utilisant les questions 2 et 4, montrer que pour tout entier n on a : $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
8. Déduire de la question précédente $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n$.
9. En faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = W_n$.

Partie B : Intégrale de Gauss

> **Définition**
> Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.
>
> On appelle intégrale de Gauss la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on notera cette limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

B1 : Existence de l'intégrale de Gauss

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puis étudier son sens de variation.
2. Prouver que, pour tout $x \geq 1$ on a $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$.
3. En utilisant la relation de Chasles, en déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis conclure.

B2 : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. a) Montrer que, pour tout réel $x > -1$ on a $\ln(1+x) \geq x$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n on a $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq I_n$.

   c) En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos u$, prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leq I_n$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$.

   b) En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan u$, prouver que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \, \mathrm{d}u.$$

   c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.
3. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.