Correction du Concours Blanc de mathématiques, proposé le 8 novembre

Exercice n° 1

Question 1 : Tout d'abord, le cours nous assure l'existence de deux racines carrées complexes (opposées) de $7-\mathrm{i}$. Déterminons-en une : $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$z^2 = 7 - \mathrm{i} \iff a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = 7 - \mathrm{i} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & : (1) \\ 2ab = -1 & : (2) \end{cases}$$

L'égalité $z^2 = 7 - \mathrm{i}$ implique l'égalité des modules : $a^2 + b^2 = 5\sqrt{2}$: (3).
En addidionnant (1) et (3) on obtient $2a^2 = 7 + 5\sqrt{2} \iff a = \pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{5}}{2}}$. (2) nous donne $b = \frac{-1}{2a}$.

Finalement, $\boxed{\sqrt{\dfrac{7+5\sqrt{2}}{2}} + \mathrm{i}\dfrac{-1}{2\sqrt{\frac{7+5\sqrt{2}}{2}}} \text{ est une racine carrée complexe de } 7-\mathrm{i}.}$

Question 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin(5x) - \sin(x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x})) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}2\mathrm{i}\sin(2x))$$

Finalement, $\boxed{\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(5x) - \sin(x) = 2\sin(2x)\cos(3x)}$.

Question 3 : Arcsin est définie sur $[-1;1]$, il suit que $f(x) = \mathrm{Arcsin}(1 + \ln x)$ a du sens si, et seulement si : $-1 \le 1 + \ln(x) \le 1 \iff -2 \le \ln(x) \le 0$. On applique la fonction exp qui est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on obtient que $f(x)$ existe si, et seulement si $\mathrm{e}^{-2} \le x \le 1$.
Finalement, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } [\mathrm{e}^{-2};1]}$.

Question 4 : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sin^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} - 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x}\right) \boxed{= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}.$$

Question 5 : On a : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=6}^{103} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=3}^{101} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{102} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{101} \frac{1}{k} - \sum_{k=5}^{101} \frac{1}{k} - \frac{1}{102} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{102}$.

Déterminons la forme irréductible de S. On a :

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{102} = \frac{7}{2^2 \times 3} - \frac{1}{2 \times 3 \times 17} = \frac{7 \times 17 - 2}{2^2 \times 3 \times 17} = \frac{117}{2^2 \times 3 \times 17} \boxed{= \frac{39}{2^2 \times 17}}.$$

Exercice n° 2

1. Les fonctions sh, ch ete Arctan sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + \mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$$

on déduit que $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont définies et dérivables sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}}$.

2. On rappelle $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a donc, par opérations :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}'(\mathrm{sh}(x))\mathrm{sh}'(x) \boxed{= \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{2(1 + \mathrm{sh}^2(x))}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathrm{Arctan}'\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\right) \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\right)$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} \times \frac{\mathrm{ch}(x)(1 + \mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1 + \mathrm{ch}(x))^2}$$

$$\boxed{= \frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1 + \mathrm{ch}(x))^2 + \mathrm{sh}^2(x)}}$$

3. On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}$. Ce résultat se prouve par le calcul :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2\mathrm{e}^x \times 2\mathrm{e}^{-x}}{4} = 1$$

4. On a, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{\text{ch}(x) + \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{(1+\text{ch}(x))^2 + \text{sh}^2(x)} = \frac{1+\text{ch}(x)}{1+2\text{ch}(x)+\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)} = \frac{1+\text{ch}(x)}{2\text{ch}(x)(1+\text{ch}(x))} = \frac{1}{2\text{ch}(x)}$$

ainsi que :

$$f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{2(1+\text{sh}^2(x))} = \frac{\text{ch}(x)}{2\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\text{ch}(x)}$$

Finalement, $\boxed{\text{on a bien } f' = g'}$

5. Comme f et g ont la même dérivée <u>sur l'intervalle</u> $\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe une constante k telle que $f = g + k$. On a $f(0) = 0 = g(0)$ donc $k = 0$.
Finalement, $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont égales}}$.

Problème : des équations polynômiales

Pour tout $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n)\ :\ z^n + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

I) **Cas** $n = 2$

1. $(E_2)\ :\ x^2 + x + 1 = 0$ est une équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = -3$, elle admet donc $\boxed{\text{deux solutions complexes qui sont } z_1 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$.
2. On a $|z_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ et $|z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1| = 1$.
Finalement, $\boxed{\text{les solutions de } (E_2) \text{ ont des modules strictement inférieurs à } 2}$.

Remarque : on a $z_1 = j$ et $z_2 = \bar{j}$, qu'il faut savoir reconnaître (mais ici, ça ne sert pas).

II) **Cas** $n = 3$

1. f est une fonction polynômiale, elle est donc bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Les limites de $f(t)$ s'obtiennent directement par opérations : $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
2. Comme f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.
Puisqu'elle est croissante et continue, on a $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{t\to-\infty} f(t); \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Il suit que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. En choisissant $y = 0$ on obtient qu'$\boxed{\text{il existe un unique } r \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(r) = 0}$.

On a $f(-1) = -1 < 0$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$. Comme f est croissante, $\boxed{\text{on déduit que } r \in]-1; -\tfrac{1}{2}[}$.

3. On a $P(X) = (X-r)(X-z_1)(X-z_2) \iff X^3 + X + 1 = (X-r)(X-z_1)(X-z_2)$.
En développant à droite on obtient :

$$X^3 + X + 1 = X^3 - X^2(r + z_1 + z_2) + X(r(z_1+z_2) + z_1z_2) - rz_1z_2$$

Puis, en identifiant les coefficients des monômes de degrés 2 et 0, on a : $r + z_1 + z_2 = 0$ et $-rz_1z_2 = 1$ qui sont équivalentes à $\boxed{z_1 + z_2 = -r \text{ et } z_1z_2 = -\frac{1}{r}}$.

Remarque : on sait que $r \neq 0$, c'est une conséquence de la question 2.

4. On sait que $-1 < r < -\frac{1}{2} \iff 1 > -r > \frac{1}{2}$. D'après la question précédente, $z_1 + z_2 = -r$ qui est un réel positif, donc $|z_1 + z_2| = -r$ et on a bien l'encadrement $\boxed{\frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1}$.

De même, $z_1z_2 = -\frac{1}{r}$ est un réel positif donc $|z_1z_2| = -\frac{1}{r}$. On a $1 > -r > \frac{1}{2} \iff 1 < -\frac{1}{r} < 2$.
Finalement, on a : $\boxed{1 < |z_1z_2| < 2}$.

5. Tout d'abord, on sait que z_1 et z_2 sont des complexes non réels, en particulier ils sont non nuls et $|z_1| \neq 0$.
D'après la question précédente, $1 < |z_1 z_2| < 2 \iff 1 < |z_1||z_2| < 2 \iff \frac{1}{|z_1|} < |z_2| < \frac{2}{|z_1|}$.
Si on suppose $|z_1| \geq 2 \iff \frac{1}{|z_1|} \leq \frac{1}{2}$, on obtient $\boxed{|z_2| < 1}$

6. L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ est : $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a - b| \leq |a| + |b|}$.
On a $|z_1| = |z_2 + z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ d'après l'inégalité triangulaire.
On a vu que $|z_1 + z_2| < 1$ et donc $\boxed{|z_1| < 1 + |z_2|}$.

   On a supposé $|z_1| \geq 2$, on a déduit $|z_2| < 1$. Or, on vient de voir que $|z_1| < 1 + |z_2|$ d'où $\boxed{|z_1| < 2 \text{ ce qui est absurde}}$.

7. Supposer que $|z_1| \geq 2$ conduit à une absurdité, on a donc $|z_1| < 2$. Quitte à permuter z_1 et z_2 dans les questions précédentes, on a aussi $|z_2| < 2$. Comme on avait vu que $|r| < 2$ on en déduit que :
$\boxed{\text{toutes les solutions de } (E_3) \text{ on des modules strictement inférieurs à 2}}$.

III) Généralisation : $n \geq 2$ quelconque

1. $\varphi(t) = t^n - t - 1$ est une fonction polynômiale ; elle est donc définie et dérivable sur $[2; +\infty[$.
Sa dérivée est : $\forall t \in [2; +\infty[,\ \varphi'(t) = nt^{n-1} - 1$.
Puisque $n \geq 2$ et $t \geq 2$ on a $t^{n-1} \geq 2$ et $nt^{n-1} - 1 > 0$.
$\boxed{\varphi \text{ est donc strictement croissante sur } [2; +\infty[}$.
Aux bornes de $[2; +\infty[$: $\varphi(2) = 2^n - 3$ car $n \geq 2$. Il y a une forme indéterminée pour la limite de φ en $+\infty$, on la lève en factorisant par t^n (possible car $t \neq 0$) :

$$\forall t \in [2; +\infty[,\ \varphi(t) = t^n \left(1 - \frac{1}{t^{n-1}} - \frac{1}{t^n}\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   φ est croissante et $\varphi(2) = 2^n - 3 > 0$ (car $n \geq 2$) donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [2; +\infty[}$.

2. Raisonnons par l'absurde : soit $z \in \mathbb{C}$, une solution de (E_n) dont le module est supérieur ou égal à 2.
On a $z^n + z + 1 = 0 \iff z^n = -z - 1$.
D'après l'inégalité triangulaire, on a alors $|z^n| \leq |z| + 1$ soit $|z|^n \leq |z| + 1$.
Comme $|z| \geq 2$, on peut appliquer φ à $|z|$ et, d'après la question précédente, on a :

$$\varphi(|z|) > 0 \iff |z|^n - |z| - |1| > 0 \iff |z|^n > |z| + 1$$

   On a donc une contradiction. Finalement, $\boxed{(z^n + z + 1 = 0) \implies (|z| < 2)}$.

3. $\boxed{\text{L'implication réciproque est fausse}}$. Par exemple, 0 est un complexe de module strictement inférieur à 2, ce n'est pourtant pas une solution de (E_n).