4 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez indiquées sur la copie seront valorisées, même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Résoudre le système linéaire $\mathcal{S} : \begin{cases} 5x+3y-z=2 \\ -2x+2y+3z=7 \\ 4x+12y+7z=5 \end{cases}$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y''+2y'+y=t$ avec les conditions $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$.

Question 3 : Discuter, en fonction du réel α, le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{x^2}{x-2}=\alpha$.

Question 4 : Donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2}$.

Question 5 : On considère la fonction $f(x)=(\sin x)^x$.

a) Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi[$.

b) Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? En π ? *(On rappelle que $\lim\limits_{u\to 0} u\ln u=0$.)*

c) Si oui, le prolongement obtenu est-il dérivable ?

Exercice n° 2

Pour chaque proposition ci-dessous, il faut indiquer si elle est vraie ou fausse, il n'est pas demandé de justifier les réponses. Une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse erronée est pénalisée de 0,5 points, l'absence de réponse n'est pas pénalisée. Sur votre copie, la présentation **doit** respecter la forme suivante :

Question 1 : V
Question 2 : F
Question 3 :
$\vdots$

Proposition 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos} \circ \cos x = x$.

Proposition 2 : Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré 2 est factorisable en produit de polynômes de degré 1.

Proposition 3 : Un polynôme de degré 2 ayant ses racines qui sont conjuguées est à coefficients réels.

Proposition 4 : Une suite qui tend vers $+\infty$ peut être décroissante.

Proposition 5 : Si la fonction f n'est pas monotone alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.

Proposition 6 : Une suite géométrique décroissante a une raison positive.

Proposition 7 : Si la fonction f est définie et continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $]a;b[$.

Proposition 8 : Un système linéaire peut avoir exactement deux solutions.

Proposition 9 : Un système linéaire ayant plus d'inconnues que d'équations ne peut pas avoir une unique solution.

Proposition 10 : Il faut au moins n vecteurs pour avoir une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Si certains élèves trouvent le sujet court, il peuvent en guise de bonus, justifier les réponses apportées au Vrai-Faux. (Il ne sera pas accordé de bonification si le Problème n'a pas été suffisament traité).

Problème

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble F qui regroupe toutes les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$(\star) : \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \qquad \text{et} \quad f(0) \geq 0$$

I. Quelques propriétés de F.

1) Justifier que F est non vide.
2) Prouver que $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$ est dans F.

Dorénavant, f désigne un élément de F.

3) a) Ecrire ce que devient $(\star)$ dans chacun des cas suivants : $x = 0$, $y = 0$, $x = y$.
   b) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
4) Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si, f est l'application nulle, notée $\widehat{0}$ dans la suite du problème.
5) Supposons que f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$.
   a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{2^n}$.
   Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0$.
   c) En déduire la valeur de $f(0)$ puis la nature de f.
6) On suppose que $f \neq \widehat{0}$. Que vaut $f(0)$? Prouver que f ne s'annule jamais puis que, pour tout réel x, $f(x) > 0$. Montrer de plus que f est paire.

II. Explicitation des éléments de F.

Soit G, l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\exists f \in F\backslash\{\widehat{0}\} \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \ln(f(x)).$$

1) Justifier que G n'est pas vide.

Dorénavant, g désigne un élément de G.

2) Prouver que g vérifie la relation $(\star\star) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$.
3) Déterminer $g(0)$ et prouver que g est une fonction paire.
4) Prouver, à l'aide de $(\star\star)$ que g vérifie la relation :

$$(\diamond) : \ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = n^2 g(x)$$

5) Montrer que la relation $(\diamond)$ reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
6) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{Q},\ g(rx) = r^2 g(x)$. (On pourra poser $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).
7) On pose $g(1) = \lambda$. Déduire de la question précédente que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = \lambda r^2$.
8) Prouver que, pour tout réel x, $g(x) = \lambda x^2$.
9) En déduire F.

III. Etude du graphe d'un élément de F.

On considère $\lambda \in \mathbb{R}$ et la famille de fonctions $f_\lambda : x \mapsto e^{(\lambda x^2)}$.
On travaille dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par C_λ la courbe représentative de f_λ.

Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur C_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine. Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie ?