3 heures 30 min

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel : Exercice 1 : 10 points, Exercice 2 : 10 points, Problème : 20 points.
1 point pour l'aspect de la copie, 1 point pour utiliser $\forall$.

Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+2)^{\sqrt{3}} = \pi$.

Question 2 : Résoudre l'équation différentielle $2y' - y = 3\mathrm{e}^{-5t}$ avec la condition initiale $y(0) = 7$.

Question 3 : Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = \mathrm{Arctan}(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{x+2})$.

Question 4 : Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) - 2\sin(x)\mathrm{d}x$.

Question 5 : Résoudre $(1-\mathrm{i})z^2 - 2z + 4 = 0$.

Exercice n° 2

(D'après Concours ATS)

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0;+\infty[$, de fonction inconnue y :

$$(E) \ : \ xy'(x) - y(x) = \mathrm{Arctan}(x)$$

et l'équation homogène associée :

$$(H) \ : \ xy'(x) - y(x) = 0.$$

1. Résoudre (H).
2. Montrer que trouver une solution particulière de (E) définie sur $]0;+\infty[$ peut se ramener à trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}$.
3. Supposons que l'on ait une fonction $F(x)$, définie sur $]0;+\infty[$, qui soit une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$. Justifier que $F(x) - \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.
4. Déterminer trois réels α, β et γ tels que, pour tout $x \in]0;+\infty[$ on ait :
$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{1+x^2}$$
5. En déduire une fonction $F(x)$ qui convienne.
6. Donner la solution générale de (E).

Problème

L'objectif de ce problème est de calculer l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales de Wallis qu'on présentera dans une première partie.

Partie A : Intégrales de Wallis

> **Définition**
> Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$ est appelée intégrale de Wallis d'indice n et notée W_n.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Etudier les variations de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
5. En déduire que, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on précisera la valeur de cette constante.
6. Déduire de la question précédente la limite de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. En utilisant les questions 2 et 4, montrer que pour tout entier n on a : $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$.
8. Déduire de la question précédente $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n$.
9. En faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = W_n$.

Partie B : Intégrale de Gauss

> **Définition**
> Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.
>
> On appelle intégrale de Gauss la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on notera cette limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

B1 : Existence de l'intégrale de Gauss

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puis étudier son sens de variation.
2. Prouver que, pour tout $x \geq 1$ on a $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$.
3. En utilisant la relation de Chasles, en déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis conclure.

B2 : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. a) Montrer que, pour tout réel $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n on a $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq I_n$.

   c) En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos u$, prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leq I_n$.
2. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$.

   b) En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan u$, prouver que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \, \mathrm{d}u.$$

   c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.
3. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.