4 heures

- Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème. Vous les traiterez dans l'ordre de votre choix mais d'un seul tenant.
- Le barême prévu pour ce devoir est de 8 points pour l'exercice 1, 4 points pour l'exercice 2, 8 points pour l'exercice 3 et 13 points pour le problème. 1 point sera attribué aux élèves qui auront utilisé les quantificateurs de façon satisfaisante et 1 point aux élèves qui auront utilisé équivalences et égalités de façon satisfaisante.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à **encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre $y' - 3ty = 2t$ avec la condition $y(0) = 1$.
2. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$. Que vaut u_{2019} ?
3. Soit $z \neq 0$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} z^k$.
4. Résoudre, pour $x \in [0; \pi]$, l'équation $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Exercice n° 2

Rappel et notation :
Soit f une fonction qu'on peut dériver autant de fois qu'on veut, soit n un entier naturel non nul. La *dérivée n-ième* de f est la fonction notée $f^{(n)}$ et définie de la façon suivante :
— si $n = 1$ alors $f^{(n)} = f'$;
— sinon, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.
Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, on note f' et f'' plutôt que $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$.

On rappelle que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que sa fonction dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$ qu'on admet dérivable autant de fois qu'on veut sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer des expressions de $f^{(n)}$ pour différentes valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, jusqu'à être en mesure de conjecturer une formule générale.
2. Démontrer la formule conjecturée.

Exercice n° 3

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$ définie pour tout $x \in]-1; +\infty[$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de f, on les résumera dans un tableau qu'on complètera avec les résultats des questions suivantes.
2. Etudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
3. Cette question vise à étudier le comportement asymptotique de f en -1^+.
   a) On pose $t = 1 + x$. Montrer que $f(x) = 2 - \frac{2}{t} - \ln(t)$.
   b) En utilisant la limite connue $t \ln t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, conclure.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions, que l'on notera a et b avec $a < b$.
   Que vaut a ? (On rappelle que $0,6 < \ln 2 < 0,7$).
5. Sachant que $\ln 5 \simeq 1,61$, comparer b et 4.
6. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
7. Prouver que, pour tout $x > -1$, $f(x) \leq x$.
8. Existe-t-il un point de $\mathcal{C}$ pour lequel la tangente a une pente minimale ? Si oui, lequel ?
9. Donner l'allure de la courbe de f (on fera apparaître les informations vues dans les questions précédentes).

Problème

L'objectif de ce problème est de prouver que le nombre $\exp(1)$, noté e, est un nombre irrationnel.

Les parties A et B sont, dans une large mesure indépendantes. Tout du long du problème, on pourra admettre les résultats des questions pour traiter les suivantes.

Partie A

Soit n, un entier naturel non nul, x un réel. On pose $R_n : x \longmapsto \mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = \frac{x^n}{n!}$.

1. Donner la solution de l'équation homogène associée à (E).
2. Utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E), on exprimera cette solution à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).
4. Prouver que R_n est une solution de E.
5. Déduire des questions précédentes que, $R_n(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!} \, \mathrm{d}t$.
6. Montrer que, pour tout réel positif x, on a $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^x}{(n+1)!}$.
7. Soit α un réel positif. Prouver que la suite $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. En déduire que, pour tout réel positif x, e^x est la limite d'une suite (dont l'expression ne fait pas intervenir exp).

Partie B

On considère à présent deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites u et v sont strictement monotones.
2. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
3. Justifier l'existence d'un unique réel ℓ qui vérifie : $\forall q \in \mathbb{N}^*,\ u_q < \ell < v_q$.
4. Supposons que ℓ soit rationnel, il est alors possible de l'écrire sous la forme d'un quotient $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec p et q qui sont premiers entre eux. En utilisant la question précédente, montrer que c'est absurde.
5. Conclure à l'irrationnalité de e.