PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 4, proposé le 27/1/2023

Exercice n° 1

Question de cours :

Soit f, définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a)=f(b)$. Alors :

$$\boxed{\exists c \in]a;b[\ ,\ f'(c)=0}.$$

Exercice n° 2

Question 1 : $P = X^5-1$ admet comme racines complexes les racines cinquièmes de l'unité : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ qu'on va noter α, α^2, $\alpha^3=\overline{\alpha^2}$, $\alpha^4=\overline{\alpha}$ et $\alpha^5=1$.

Il suit que $\boxed{\text{la décomposition de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X] \text{ est } P=\prod_{k=1}^{5}(X-\alpha^k)}$.

Pour déterminer la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on part de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}
P &= (X-\alpha)(X-\alpha^2)(X-\alpha^3)(X-\alpha^4)(X-\alpha^5)\\
&= \underbrace{(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})}_{X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)+1}\underbrace{(X-\alpha^2)(X-\overline{\alpha^2})}_{X^2-2\mathrm{Re}(\alpha^2)+1}(X-1)\\
&= \boxed{(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1)(X-1)}
\end{aligned}$$

Question 1 : On applique la méthode du cours.

Division euclidienne de X^4+X par $2X^3+5X^2+3X+2$, utilisation dans la fraction rationnelle :

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & X^4 & & & +X & & 2X^3+5X^2+3X+2 \\ \cline{7-7}
-(& X^4 & +\frac{5}{2}X^3 & +\frac{3}{2}X^2 & +X) & & \frac{1}{2}X-\frac{5}{4} \\ \cline{1-5}
 & & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{3}{2}X^2 & & & \\
-(& & -\frac{5}{2}X^3 & -\frac{25}{4}X^2 & -\frac{15}{4}X & -\frac{5}{2}) & \\ \cline{1-6}
 & & & \frac{19}{4}X^2 & +\frac{15}{4}X & +\frac{5}{2} &
\end{array}$$

Finalement, $\underline{X^4+X=(2X^3+5X^2+3X+2)(\frac{1}{2}X-\frac{5}{4})+\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}$.

Dans la fraction rationnelle, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{X^4+X}{2X^3+5X^2+3X+2} &= \frac{(2X^3+5X^2+3X+2)(\frac{1}{2}X-\frac{5}{4})+\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{2X^3+5X^2+3X+2}\\
&= \frac{1}{2}X-\frac{5}{4}+\frac{\frac{19}{4}X^2+\frac{15}{4}X+\frac{5}{2}}{2X^3+5X^2+3X+2}
\end{aligned}$$

Ecriture de $2X^3+5X^2+3X+2$ en produit de facteurs irreductibles :
-2 est racine évidente de $2X^3+5X^2+3X+2$: $2(-2)^3+5(-2)^2+3(-2)+2=-16+20-6+2=0$. Il suit qu'on peut factoriser $2X^3+5X^2+3X+2$ par $X+2$ et après calculs (soit en posant la division, soit en résolvant un système), on a $\underline{2X^3+5X^2+3X+2=(X+2)(2X^2+X+1)}$ qui est un produit de polynômes irreductibles sur $\mathbb{R}$ (le discriminant de $2X^2+X+1$ est $-7<0$).

Forme de la fraction rationnelle en éléments simples et recherche des coefficients :
D'après ce qui a été vu précédemment, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ \frac{x^4+x}{2x^3+5x^2+3x+2}=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{\frac{19}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{5}{2}}{(x+2)(2x^2+x+1)}$$

Le cours nous assure qu'il existe un unique triplet de réels (a, b, c) tel que :

$$\frac{\frac{19}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{5}{2}}{(x+2)(2x^2+x+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{2x^2+x+1} \quad : (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par $x+2$, $x=-2$ devient autorisé et on a alors : $\frac{19-\frac{15}{2}+\frac{5}{2}}{7} = a \Leftrightarrow \underline{a=2}$.

$(\star)$ devient $\frac{\frac{19}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{5}{2}}{(x+2)(2x^2+x+1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{bx+c}{2x^2+x+1} \Longleftrightarrow \frac{19}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{5}{2} = 2(2x^2+x+1) + (bx+c)(x+2)$.

On en déduit que b et c satisfont le système $\begin{cases} \frac{19}{4} = 4 + b \\ \frac{15}{4} = 2 + 2b + c \\ \frac{5}{2} = 2 + 2c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{2}{x+2} + \frac{\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{2x^2+x+1}}$$

Question 2 : a) $f(x) = (\sin x)^x = \mathrm{e}^{x \ln(\sin x)}$ a du sens si, et seulement si, $\sin x > 0$ ce qui est le cas sur $]0;\pi[$. La fonction f est donc définie sur $]0;\pi[$.

$\boxed{\text{Par opérations sur les fonctions de classe } \mathcal{C}^\infty,\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0;\pi[}$.

b) **En** 0 **:** Pour $x \in]0;\pi[$ on a $x\ln(\sin x) = \frac{x}{\sin x} \times (\sin x)\ln(\sin x)$.

Or, on sait que $\lim\limits_{u \to 0^+} u \ln u = 0$. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, en posant $u = \sin x$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)\ln(\sin x) = 0$.

On sait également que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Par opérations sur les limites, il vient :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \times (\sin x)\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x\to 0^+} (\sin x)\ln(\sin x) = 0$$

Par composition avec exp, il suit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{On peut donc prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$.

En π **:** on a $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\pi^-} \ln(\sin x) = -\infty$ puis $\lim\limits_{x\to\pi^-} x\ln(\sin x) = -\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = 0$ en composant avec exp.

$\boxed{\text{On peut donc prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(\pi) = 0}$.

Question 3 : Soit $n \geq 1$, on intègre I_n par parties en posant $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{1}{(1+x^2)^n} \end{cases}$ et $\begin{cases} u = x \\ v' = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \end{cases}$.

On a :

$$I_n = \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} = 2nI_{n+1} \Longleftrightarrow \boxed{I_{n+1} = (1 - \frac{1}{2n})I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}}$.

Comme $I_1 = [\text{Arctan } x]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$, on déduit $= (1 - \dfrac{1}{2})I_1 + \dfrac{1}{2^3}\boxed{= \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}}$.

Exercice n° 3

On a, pour deux nombres quelconques $a < b$, le nombre $\dfrac{a+b}{2}$ qui est la moyenne de a et de b, graphiquement sur la droite réelle c'est le milieu du segment $[a;b]$ et donc $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. En faisant une figure, on intuite que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leq u_n + 1$, montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a donc bien $u_n < u_{n+1} \leq u_n + 1$ pour $n = 0$.

Supposons que la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n < u_{n+1} \leq u_n + 1$.

Montrons qu'alors on a : $u_{n+1} < u_{n+2} \leq u_{n+1} + 1$.

$$u_n < u_{n+1} \implies u_n < \frac{u_n + u_{n+1}}{2} < u_{n+1} \implies u_n + 1 < u_{n+2} < u_{n+1} + 1$$

Or, on a également $u_{n+1} \leq u_n + 1$ d'où $u_{n+1} < u_{n+2}$ et la propriété est bien héréditaire.
Finalement, la propriété étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} \leq u_n + 1$.

En conséquence, $\boxed{u \text{ est strictement croissante}}$.

Problème 1

I. (a) On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée d'une colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et on obtient après calculs $(P|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1 - 2b_3 \end{array}\right)$.

$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible et que } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$.

(b) $\boxed{\text{On calcule et on vérifie } P^{-1}AP = D}$.

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il suit que, pour tout entier naturel non nul n :

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Après calculs : $\boxed{\forall n > 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n & 0 & 2((-3)^n - 1) \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}}$.

II. (a) $\boxed{\text{La matrice nulle est dans } C(B) \text{ donc } C(B) \text{ est non vide}}$.

(b) Soit M et M' deux matrices de $C(B)$, λ et μ deux réels. On a :

$$(\lambda M + \mu M')B = \lambda MB + \mu M'B = \lambda BM + \mu BM' = B(\lambda M + \mu M')$$

On en déduit que $\lambda M + \mu M'$ est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par combinaison linéaire}}$.

(c) Soit M et M' deux matrices de $C(B)$. On a :

$$MM'B = M(M'B) = MBM' = (MB)M' = BMM'$$

On en déduit que MM' est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par produit}}$.

(d) I_n est dans $C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ contient au moins une matrice inversible}}$.

(e) Soit M une matrice inversible de $C(B)$ (c'est légitime d'après la question précédente), on a :

$$\begin{aligned} MB = BM &\iff M^{-1}MB = M^{-1}BM \\ &\iff B = M^{-1}BM \\ &\iff BM^{-1} = M^{-1}BMM^{-1} \\ &\iff BM^{-1} = M^{-1}B \end{aligned}$$

On en déduit que $M^{-1} \in C(B)$ et donc $\boxed{C(B) \text{ est stable par passage à l'inverse}}$.

(f) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Clairement, $B \in C(B)$ (c'est vrai pour toute matrice). On calcule et on observe que $B^T B \neq BB^T$ et dont B^T n'est pas dans $C(B)$.
$\boxed{\text{Finalement, } C(B) \text{ n'est pas stable par transposition}}$.

III. (a) Procédons par équivalence. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M \in C(A) &\iff MA = AM \\ &\iff MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \\ &\iff P^{-1}MPD = DP^{-1}P \\ &\iff P^{-1}MP \in C(D) \end{aligned}$$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \gamma & b & c \\ \delta & d & e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On calcule DM et MD et on a $M \in C(D)$ si, et seulement si $DM = MD$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} -3a & -3\alpha & -3\beta \\ \gamma & b & c \\ \delta & d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & \alpha & \beta \\ -3\gamma & b & c \\ -3\delta & d & e \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = -3\alpha \\ \beta = -3\beta \\ \gamma = -3\gamma \\ \delta = -3\delta \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Finalement, $\boxed{C(D) \text{ est l'ensemble des matrices de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^4.}$

(c) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question (a), $M \in C(A)$ si, et seulement si, $P^{-1}MP \in C(D)$, c'est-à-dire si, et seulement si $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^4$.
En utilisant les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a donc :

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3}$$

En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P on obtient :

$$M \in C(A) \iff M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1}$$

Finalement, $\boxed{C(A) = \mathrm{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})}$.

Problème 2

Partie I

1. On a $u_1 = \left(\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}\right) - \ln(1) \boxed{= 1}$.
2. Le Théorème des Accroissements Finis (TAF dans la suite) :
$\boxed{\text{Soit deux réels } a < b \text{ et } f \text{ une fonction définie sur } [a;b], \text{ continue sur } [a;b] \text{ et dérivable sur }]a;b[. \text{ Alors il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.
On applique le TAF à la fonction ln entre n et $n+1$: il existe $c \in]n; n+1[$ tel que $\ln'(c) = \ln(n+1) - \ln(n)$.
Or $\ln'(c) = \frac{1}{c}$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $n \leq c \leq n+1 \Longrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{n+1}$.
Finalement, on a bien $\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}}$.
4. Soit $n > 0$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \boxed{= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

5. La question précédente ainsi que l'encadrement de la question 3 donnent, pour $n > 0$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n+1} \geq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq -\frac{1}{n} \iff 0 \geq u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \ : (\star)$$

On en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

Par ailleurs, on a pour tout $n > 0$: $u_n - u_1 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1)$.
L'encadrement $(\star)$ est écrit pour n mais, comme n est quelconque, on peut donc le considérer pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$:

$$\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ 0 \geq u_{k+1} - u_k \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$$

En sommant de 1 à $n-1$ on obtient :

$$0 \geq u_n - u_1 \geq \frac{1}{n} - 1 \iff \boxed{1 \geq u_n \geq \frac{1}{n}}.$$

6. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.}}$

   Par passage à la limite dans l'encadrement fourni à la question 5, on a $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$.

7. (a) Soit $k > 0$. On factorise : $\forall x \in [k; k+1],\ f_k(x) = \dfrac{(x-k)(k+1-x)}{k(k+1)x}$.
   On en déduit que $\forall x \in]k, k+1[$: $f_k(x) > 0$. De plus la fonction est nulle aux extrémités de l'intervalle. $\boxed{\text{Finalement, } f_k \text{ est strictement positive sur }]k; k+1[, \text{ nulle en } k \text{ et } k+1}$.

   (b) Considérons une primitive F_k de f_k. D'après la question précédente F_k est strictement croissante dans $[k, k+1]$. On a alors : $\boxed{F_k(k) < F_k(k+1)}$.

   (c) On peut choisir $F_k(x) = \dfrac{x}{k} + \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}\right)\dfrac{(x-k)^2}{2} - \ln(x)$.

   L'inégalité $F_k(k) \leq F_k(k+1)$ conduit après calcul à : $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1})$.

   L'autre inégalité a déjà été obtenue en 3, on a bien : $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leq \ln\dfrac{k+1}{k} \leq \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1})}$.

8. On somme les inégalités obtenues à la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) \\
&\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \\
&\qquad\vdots \\
&\frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n+1) \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n})
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

L'inégalité de gauche redonne $u_n \leq 1$. Celle de droite s'écrit

$$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \implies 0 \leq u_n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq u_n$$

Par passage à la limite, on obtient alors : $\boxed{\dfrac{1}{2} \leq \gamma \leq 1}$.

Partie II

1. Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}^+*$ et on a :

$$\forall x > 0, \quad g_1'(x) = \frac{2x+1}{x^3(x+1)^2} > 0 \quad \text{et} \quad g_2'(x) = -\frac{3x+2}{x^4(x+1)^2} < 0$$

On en déduit les tableaux

	0	∞
g_1	$-\infty$ $\nearrow$	0
g_1	$-$	

	0	∞
g_2	$+\infty$ $\searrow$	0
g_2	$+$	

2. Soit $n > 0$. On a déjà calculé $u_n - u_{n+1}$ et trouvé : $u_n - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$.

Alors $g_1(n) < 0$ entraîne :

$$-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} < 0 \Longrightarrow \boxed{u_n - u_{n+1} < \frac{1}{2n^2}}$$

De même, $g_2(n) > 0$ entraîne :

$$-\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} > 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} < u_n - u_{n+1}}$$

3. (a) La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante dans l'intervalle $[k, k+1]$. L'inégalité des accroissements finis donne donc l'encadrement $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$.

En sommant ces inégalités entre $n-1$ et $p-1$ (à droite) et entre n et p (à gauche), on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}}$$

(b) De même l'inégalité des accroissements finis appliquée à $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ donne :

$$\frac{2}{(k+1)^3} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{2}{k^3}$$

ce qui conduit après sommations à :

$$\boxed{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \leq 2\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{p^2}}$$

(c) En sommant l'encadrement de la question 2. pour k entre n et p, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{k^2} - \frac{2}{3}\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{k^3} \leq u_n - u_{p+1} \leq \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{k^2}$$

On utilise alors les encadrements de 3.a. et 3.b.. Il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{p^2}\right) \leq u_n - u_{p+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}\right)$$

On fixe alors n, le passage à la limite pour $p \to \infty$ dans les inégalités donne :

$$\boxed{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}}$$

4. L'encadrement précédent détermine γ avec une erreur inférieure à 10^{-2} lorsque

$$\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3(n-1)^2} \leq 10^{-2} \iff \frac{5n-3}{6n(n-1)^2} \leq 10^{-2}.$$

On trouve par évaluation numérique que le plus petit entier permettant d'approcher γ à la précision demandée est $\boxed{n = 10}$.