Correction du DS4 de mathématiques, proposé le 27 novembre

Exercice n° 1

Question 1 : $(x+2)^{\sqrt{3}}$ signifie $\mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln(x+2)}$, cette expression a du sens si, et seulement si, $x > -2$.
On a : $\forall x \in]-2;+\infty[$, $(x+2)^{\sqrt{3}} = \pi \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{3}\ln(x+2)} = \pi \Leftrightarrow \sqrt{3}\ln(x+2) = \ln(\pi) \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\ln(\pi)}{\sqrt{3}}\right) - 2$.
Ce nombre est supérieur à -2 (car exp prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$), on en déduit que :
$\boxed{\text{l'équation a pour unique solution } \exp\left(\frac{\ln(\pi)}{\sqrt{3}}\right) - 2}$.

Question 2 : On cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec une une condition initiale.

— **Résolution de l'équation homogène** : $2y'-y=0 \Leftrightarrow y'-\frac{1}{2}y = 0$ a pour solution $\left\{t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{t/2} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

— **Recherche d'une solution particulière** : on cherche une fonction de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-5t}$ avec k un réel à déterminer. f est solution de $2y'-y = 3\mathrm{e}^{-5t}$ si, et seulement si, $2f'-f = 3\mathrm{e}^{-5t}$. On a :

$$2f'-f = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow -10k\mathrm{e}^{-5t} - k\mathrm{e}^{-5t} = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow -11k\mathrm{e}^{-5t} = 3\mathrm{e}^{-5t} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{11}.$$

Finalement, $f(t) = -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

— **La solution générale de l'équation différentielle est** : $\left\{t \mapsto -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \lambda\mathrm{e}^{t/2} \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

— **Condition initiale** : soit une fonction $y(t) = -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \lambda\mathrm{e}^{t/2}$, avec λ un réel à déterminer.
$y(t)$ vérifie $y(0) = 7$ si, et seulement si, $-\frac{3}{11} + \lambda = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{80}{11}$.
$\boxed{\text{Finalement, la fonction cherchée est : } t \longmapsto -\frac{3}{11}\mathrm{e}^{-5t} + \frac{80}{11}\mathrm{e}^{t/2}.}$

Question 3 : Etudions la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(\sqrt{x+1}) - \ln(\sqrt{x+2})$.

— **Domaine de définition** : Arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(\sqrt{x+1})$ existe si, et seulement si, $\sqrt{x+1}$ existe ; soit si, et seulement si, $x \in [-1;+\infty[$.
ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc $\ln(\sqrt{x+2})$ existe si, et seulement si $\sqrt{x+2}$ existe et est strictement positif, c'est-à-dire si, et seulement si, $x \in]-2;+\infty[$.
Finalement, $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1;\infty[\cap]-2;+\infty[= [-1;+\infty[}$.

— **Dérivée et variations** : les fonctions Arctan et ln sont dérivables sur leur domaine de définition ; $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Par opérations, on déduit que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;+\infty[,\ f'(x) &= \mathrm{Arctan}'(\sqrt{x+1}) \times \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x+1})}{\mathrm{d}x} - \ln'(\sqrt{x+2}) \times \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x+2})}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1}{x+2} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{1}{2(x+2)}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1\right).\end{aligned}$$

Etudions le signe de $f'(x)$: comme $x > -1$, on a $x+2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$.
On a :

$$\forall x > -1,\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \geq 0 \iff \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq 1 \iff \sqrt{x+1} \leq 1 \iff x \leq 0$$

(On a appliqué les fonctions inverse et carré qui sont décroissante et croissante (respectivement) sur $\mathbb{R}^{+*}$).
On en déduit le tableau de variations de f (en fin d'exercice, après le calcul ces limites) et que f admet un maximum en 0 avec $f(0) = \mathrm{Arctan}(1) - \ln(\sqrt{2}) = \frac{\pi - 2\ln(2)}{4}$.

— **Comportement aux bornes du domaine de définition** :
Par opérations, on sait que f est continue en -1 et $f(-1) = 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \mathrm{Arctan}(u) = \frac{\pi}{2}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(\sqrt{x+1}) = \frac{\pi}{2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x+2}) = +\infty$.
Par opérations, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
On dresse le tableau de variations complet de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi-2\ln(2)}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Remarque : on a indiqué dans le tableau que f n'est pas dérivable en -1 ce que l'on ne sait pas. On a vu qu'on ne pouvait pas déduire la dérivabilité en -1 par opérations ; cela ne signifie pas que f n'est pas dérivable (il faudrait faire un étude spécifique en -1).

Question 4 : On intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0, on en déduit que $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) - 2\sin(x)\mathrm{d}x = 0}$.

(Sans cet argument, on dispose d'une primitive de la fonction intégrée avec $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) + 2\cos(x)$).

Question 5 : $(1-\mathrm{i})z^2 - 2z + 4 = 0$ est une équation du second degré qui n'a pas de solution évidente. Son discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 4 \times (1-\mathrm{i}) = -12 + 16\mathrm{i} = 4(-3+4\mathrm{i})$. Δ est non nul, l'équation a donc deux solutions distinctes : $\frac{2\pm\delta}{2(1-\mathrm{i})}$ où δ désigne une racine carrée complexe de Δ.
Pour trouver un δ convenable, déterminons une racine carrée complexe de $-3+4\mathrm{i}$. Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$z^2 = -3+4\mathrm{i} \iff a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab = -3 + 4\mathrm{i} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 2 \end{cases}$$

On en déduit que $1 + 2\mathrm{i}$ est une racine carrée complexe de $-3+4\mathrm{i}$ et que $\delta = 2(1+2\mathrm{i})$ est une racine carrée complexe de Δ.
Finalement, $\boxed{\text{les deux solutions de } (1-\mathrm{i})z^2 - 2z + 4 = 0 \text{ sont } \frac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 2\mathrm{i} \text{ et } \frac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 1 - \mathrm{i}}$.

Exercice n° 2

1. On travaille pour $x > 0$ on a donc $(H) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions de (H) est : $\left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\ln x} / \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{\{x \mapsto \lambda x / \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

2. On utilise la méthode de la variation de la constante : cherchons une solution particulière de (E) qui soit de la forme $f(x) = x\lambda(x)$, avec λ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On a :

$$xf'(x) - f(x) = \mathrm{Arctan}(x) \iff x(\lambda(x) + x\lambda'(x)) - x\lambda(x) = \mathrm{Arctan}(x) \iff \lambda'(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}.$$

$\boxed{\text{Finalement, si on connait une primitive de } x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2} \text{ on en déduira une solution particulière de } (E)}$.

3. F est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On a, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x) - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\right) = F'(x) - \left(-\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x^2)}\right) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}.$$

$\boxed{\text{Finalement, } x \mapsto F(x) - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \text{ est bien une primitive de } x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2} \text{ sur }]0;+\infty[}$.

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $\dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta x + \gamma}{1+x^2} = \dfrac{x^2(\alpha+\beta) + \gamma x + \alpha}{x(1+x^2)}$.
On en déduit :

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \frac{x^2(\alpha+\beta) + \gamma x + \alpha}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in]0;+\infty[\text{ on a : } \dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}}$.

5. Sur $]0;+\infty[$, $x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$, c'est donc une fonction $F(x)$ qui convient.

   On peut modifier l'expression de cette fonction : $\forall x \in]0;+\infty[,\ F(x) = \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \boxed{\ln\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}}$.

6. On déduit des questions précédentes que $x \mapsto \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - -\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$ convient pour $\lambda(x)$. Une solution particulière de (E) est donc $x\lambda(x)$ et il suit que la solution générale de (E) est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto x\left(\lambda + \ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Problème

Partie A : Intégrales de Wallis

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \text{ d}x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \text{ d}x = [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\sin x - 1) \text{ d}x$. Or, pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$ et $\sin x - 1 \leq 0$.
   Par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans le « bon sens ») on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} - W_n \leq 0$, c'est-à-dire que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

3. $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[,\ \sin x > 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ W_n > 0$ (encore par positivité de l'intégrale).
   $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée donc convergente vers un réel } \ell \geq 0}$.

4. Soit n un entier naturel. On a : $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \text{ d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x \text{ d}x$.

   On pose $\begin{cases} u' = \sin x \\ v = \sin^{n+1} x \end{cases}$ et $\begin{cases} u = -\cos x \\ v' = (n+1)\sin^n x \cos x \end{cases}$ et, en intégrant par parties il vient :

$$W_{n+2} = -\left[\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x \text{ d}x = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x \text{ d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

   En regroupant les termes, il vient $\boxed{W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n}$.

5. D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
   En multipliant les deux membres par $(n+2)W_{n+1}$ il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } ((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

6. On sait que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
   Si on avait $\ell > 0$ on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)W_{n+1}W_n = +\infty$ par produit sur les limites.
   Or, on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\boxed{\ell = 0}$.

7. La question 2 nous permet d'écrire que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$.
   En utilisant la question 4, il vient : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$.
   En divisant par W_n (qui est strictement positif) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1}$.

8. À l'aide de l'encadrement trouvé à la question précédente, en utilisant le théorème des gendarmes, il vient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$.
   On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \iff \frac{n+1}{n} \times \frac{W_{n+1}}{W_n} \times nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$.
   En passant à la limite, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$ puis, par composition, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$.

9. En faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-\ \mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \ \mathrm{d}t = \boxed{W_n}.$$

B1 : Existence de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ a donc du sens, quel que soit } n \in \mathbb{N}}$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x > 0$ par positivité de l'intégrale.
   Il suit que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.
2. On a : $\forall x \geq 1,\ x \leq x^2 \iff -x \geq -x^2 \iff \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-x^2}$. On a bien : $\boxed{\forall x \geq 1,\ \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-x^2}}$.
3. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x \leq I_1 + \int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq I_1 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leq I_1 + \mathrm{e}^{-1}$ donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée, elle est donc convergente et la notation } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x \text{ a du sens}}$.

B2 : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. a) Soit la fonction $f(x) = x - \ln(1+x)$ définie sur $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$. f est dérivable et $\forall x > -1,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ qui a le même signe que x (car $x > -1$). f admet donc un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Il suit que $\boxed{\forall x > -1,\ 0 \leq f(x) \iff \ln(1+x) \leq x}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0; \sqrt{n}]$ on a $-\frac{x^2}{n} > -1$ et donc $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -\frac{x^2}{n} \iff n\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leq -x^2$.
   En composant avec exp qui est croissante, on a : $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2}$ puis, par croissance de l'intégrale,
   $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \ \mathrm{d}x \leq I_n}$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos u$ (qui donne $\mathrm{d}x = -\sqrt{n}\sin u \ \mathrm{d}u$), on a :

   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2 u\right)^n (-\sqrt{n}\sin u) \ \mathrm{d}u = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} u \ \mathrm{d}u = \sqrt{n}\ W_{2n+1}.$$

   La question précédente permet de déduire que $\boxed{\text{prouver que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\ W_{2n+1} \leq I_n}$.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On procède de façon analogue à la question 1b :

   $$\forall x \in [0; \sqrt{n}],\ \ln(1 + \frac{x^2}{n}) \leq \frac{x^2}{n} \iff -n\ln(1 + \frac{x^2}{n}) \geq -x^2 \iff \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \geq \mathrm{e}^{-x^2}.$$

   En intégrant sur $[0; \sqrt{n}]$ on obtient : $\boxed{I_n \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \ \mathrm{d}x}$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan u$ (qui donne $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\frac{1}{\cos^2 u} \ \mathrm{d}u$) il vient :

   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2 u\right)^{-n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u} \ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos u)^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\cos^2 u} \ \mathrm{d}u = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \ \mathrm{d}u.$$

   c) On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n \leq \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \ \mathrm{d}u$.
   Or, puisque la fonction intégrée est positive, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u \ \mathrm{d}u \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} u \ \mathrm{d}u$.
   De plus, en utilisant la dernière question de la partie A, cette intégrale vaut W_{2n-2}. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq \sqrt{n}\ W_{2n-2}}$.

3. On a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sqrt{n}\ W_{2n+1} \leq I_n \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$.
Or, d'après la question 8 de la partie A : $\sqrt{n}\ W_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \times \sqrt{2n+1} W_{2n+1} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
De façon analogue, on a $\sqrt{n} W_{2n-2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui permet de conclure, grâce au théorème des gendarmes que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$