PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 5 30/1/2021

2 heures

- Pour ce devoir, il vous est demandé de **composer de façon anonyme**. Vous devez uniquement faire apparaître sur la copie l'identifiant que vous avez reçu par email.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez indiquées sur la copie seront valorisées, même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à $\boxed{\text{encadrer les résultats}}$. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

## Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

**Question 1 :** Discuter, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

*(On pourra prendre un ou deux exemples pour commencer).*

**Question 2 :** Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.

Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$ ?

**Question 3 :** déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+1)}$.

**Question 4 :** Pour $n \geq 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

En intégrant $I_n$ par parties, trouver une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$. En déduire la valeur exacte de $I_2$.

# Problème

L'objectif de ce problème est de s'intéresser, à travers l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, à la notion de **commutant** d'une matrice carrée.

Dans la première partie, on observe quelques propriétés de $A$, dans la seconde (qui est indépendante de la première) on définit le commutant d'une matrice carrée et on en établit des propriétés. Dans la dernière partie, largement indépendante de la deuxième, on détermine le commutant de $A$.

## I. Quelques propriétés de $A$.

On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.

(b) Montrer que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n$. En déduire la matrice $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

## II. Commutant d'une matrice carrée.

> **Définition :**
> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
> On appelle **commutant de** $B$ et on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec $B$. Autrement dit :
> $$C(B) \;=\; \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; BM = MB\}$$

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Justifier que $C(B)$ est non vide.

(b) Montrer que $C(B)$ est stable par combinaison linéaire, autrement dit :

$$\forall (M, M') \in C(B),\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda M + \mu M' \in C(B).$$

(c) Montrer que $C(B)$ est stable par produit, autrement dit : $\forall (M, M') \in C(B),\ MM' \in C(B)$.

(d) Montrer que $C(B)$ contient au moins une matrice inversible.

(e) Montrer que si $M \in C(B)$ est inversible, alors $M^{-1} \in C(B)$.

(f) $C(B)$ est-il stable par transposition ?

## III. Commutant de la matrice $A$.

(a) Prouver que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a :

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(D)$$

(b) Montrer que $C(D)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4$.

(c) En déduire que les matrices de $C(A)$ sont les combinaisons linéaires de cinq matrices que l'on précisera.