PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 5 11/3/2023

4 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Au sein d'un exercice, les question doivent être traitées dans l'ordre. **Une pénalité de 1 point sera appliquée si ce n'est pas le cas**.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à $\boxed{\text{encadrer les résultats}}$. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel : question de cours : 1 point, ex1 : 8 points, chaque Problème est sur 15 points.
Réponses encadrées et aspect de la copie : 1 point, utilisation des symboles $\forall$ et $\Longleftrightarrow$: 1 point.

Question de cours : On se place dans un espace vectoriel E. Quand dit-on d'une famille de vecteurs qu'elle est libre ?

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes. On les traitera sans utiliser la notion de dimension.

Question 1 : L'ensemble A des suites réelles vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Question 2 : La famille $(2X^3 + 5X\ ;\ X^3 - 2X\ ;\ X^2 - X\ ;\ X^2 + 4X)$ est-elle libre ou liée ?

Question 3 : Prouver que $(1\ ;\ X\ ;\ X(X-1)\ ;\ X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Question 4 : Soit $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4\ /\ 2x - t = z\}$.
Déterminer une base et un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$

Problème 1

Le but de ce problème est d'étudier deux suites qui convergent vers $\sqrt{2}$ et de comparer leurs vitesses de convergence.

Partie A : algorithme de Babylone

On considère les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $p_0 = q_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geqslant q_n$.
2. On définit une nouvelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{p_n}{q_n}$.
   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
   c) En déduire une majoration de $\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ en fonction de n et u_0.
   d) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
3. a) Prouver (sans récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$.
   b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
   c) Donner un équivalent en $+\infty$ de p_n sous la forme $\alpha \cdot \beta^n$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à préciser.
4. A l'aide du résultat du 3.(b), donner l'expression de q_n en fonction de n.
   Préciser également un équivalent en $+\infty$ de q_n.

5. En déduire un équivalent en $+\infty$ de u_n et retrouver le résultat de la question 2.(c).

Partie B : algorithme de Héron

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre v_n est bien défini, que $v_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in [1,2]$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(v_n - \sqrt{2}\right)^2}{2v_n}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\left|v_n - \sqrt{2}\right|}{2}$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Partie C : Comparaison des vitesses de convergence

On considère pour la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer t_{n+1} en fonction de u_n, v_n et t_n.
2. Montrer que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |t_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-N}}\,|t_N|$.
3. Laquelle des deux suites converge le plus vite vers $\sqrt{2}$?

Problème 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Préliminaires

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $\ln(1+u)$ et de $(1+u)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$, fixé).
2. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)$.
3. Prouver que f est une fonction paire.

Partie A

1. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, notera f ce prolongement.
2. Prouver que : $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)$.
3. En déduire le développement l'ordre 4 de f en 0.
4. Jusitifer que f est dérivable en 0, préciser $f'(0)$.
5. Trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\varphi(x)$.
6. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
7. Etudier les variations de f.
8. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
9. Tracer sommairement le graphe de f. Préciser la position de la courbe par rapport à la parabole d'équation $y = e(1 - \frac{x^2}{6})$ au voisinage de 0.

Partie B

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ nulle en 0. On définit la fonction H sur $\mathbb{R}^+$ en posant : $H(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{F(x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Montrer que H est continue en 0.
2. Montrer que H est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}^+$, préciser $H'(0)$ et $H''(0)$.
3. Montrer que $H(x) \geq f(x)$ pour tous les x de $\mathbb{R}^+$.
4. Quelle est la limite de H en $+\infty$?

Partie C

1. Montrer que F admet une bijection réciproque G définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que G est dérivable. Montrer que, pour tout $u > 0$, il existe v dans $]0, G(u)[$ tel que $\dfrac{G(u)}{u} = \dfrac{1}{f(v)}$.