PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 5 25/1/2020

4 heures

- Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème. Vous les traiterez dans l'ordre de votre choix mais d'un seul tenant.
- Le barême prévu pour ce devoir est de 6 points pour l'exercice 1, 5 points pour l'exercice 2, 6 points pour l'exercice 3, 7 points pour l'exercice 4 et 7 points pour l'exercice 5. 1 point sera attribué aux élèves qui auront utilisé les quantificateurs de façon satisfaisante et 1 point aux élèves qui auront utilisé équivalences et égalités de façon satisfaisante.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à **encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercices sont indépendantes.

1. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 4^{\#X}$?

   (On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E).

2. Trouver des entiers naturels u et v tels que $253u + 17v = 1$.

3. Résoudre le système $\mathcal{S} : \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 3t = 0 \\ 5x + y - z + 4t = 0 \end{cases}$.

   On exprimera l'ensemble des solutions sous la forme d'un espace engendré par des vecteurs à coordonnées entières.

Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut compter le nombre de façons différentes de monter un escalier de n marches si on peut faire des pas de 1 ou de 2 marches ; on appelle ce nombre X_n.

1. Déterminer X_i pour $i \in [\![1;4]\!]$.
2. Soit $n \geq 3$, trouver une relation de récurrence entre X_n, X_{n-1} et X_{n-2}.
3. Quelle valeur donner X_0 pour que la relation trouvée à la question précédente demeure vraie au rang $n = 2$?
4. Pour $n \geq 0$, exprimer X_n en fonction de n.

Exercice n° 3

L'objet de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui respectent l'addition, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \ : (\star)$$

. Soit Ω, l'ensemble des fonctions continues qui sont solutions de $(\star)$.

1. Justifier que $\Omega \neq \emptyset$.

   On procède par Analyse-Synthèse.

2. Soit $f \in \Omega$. Montrer que f est impaire.
3. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$, puis que $\forall n \in \mathbb{Z}\ f(n) = nf(1)$.
4. Prouver que, $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)$.
5. En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)$ (on pourra penser à introduire une suite liée à x).
6. Conclure l'Analyse.
7. Faire la Sytnhèse et donner la conclusion de l'exercice.

Exercice n° 4

L'objet de cet exercice est de chercher à résoudre l'équation différentielle (E) : $|x|y' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$, on appelle $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des solutions trouvées.
2. a) Vérifier que $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$, on appelle $\mathcal{S}^-$ l'ensemble des solutions trouvées.
3. Une solution sur $\mathbb{R}$?
   (a) Supposons qu'il existe une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$. Quel lien f aurait-elle avec $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$?
   (b) Etudier les limites en 0 des éléments de $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$.
   (c) Est-il possible d'avoir un recollement entre une fonction de $\mathcal{S}^+$ et une fonction de $\mathcal{S}^-$ qui soit prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner l'expression d'un tel recollement.
   (d) A l'aide des accroissements finis, montrer que $\forall x \leq 0,\ |\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq (1-\mathrm{e}^x)x^2$.
   (e) En déduire qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 5

L'objet de cet exercice est d'observer les propriétés de régularité d'une fonction dérivée.

1. Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \end{array} \right.$

   a) Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (on notera f ce prolongement).

   b) Prouver que f est dérivable en 0.

   c) Justifier que f' n'est pas continue en 0.

   Une fonction dérivée n'est donc pas nécessairement continue.

2. On dit d'une fonction f définie sur un intervalle I qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires lorsque, pour tous $a < b$ dans I, pour tout λ entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet au-moins une solution $x \in [a;b]$.

   a) Expliquer pourquoi la fonction $g(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \cos \frac{1}{x} \text{ sinon} \end{array} \right.$ est un exemple de fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.
   Pourrait-on trouver un exemple du contraire, c'est-à-dire d'une fonction continue qui ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires ?

   b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$. Soit donc $a < b$, on va supposer soit λ entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On introduit deux nouvelles fonctions définies sur $[a;b]$:

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} f'(a) \text{ si } x = a \\ \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ sinon.} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi(x) = \left\{ \begin{array}{l} f'(b) \text{ si } x = b \\ \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

   i. Justifier que φ et ψ sont continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$.

   ii. Après avoir constaté $\varphi(b) = \psi(a)$, expliquer pourquoi λ est dans au moins un des ensembles $\varphi([a;b])$ et $\psi([a;b])$.

   iii. En utilisant le Théorème des accroissements finis, conclure.