PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 5, proposé le 11/3/2023

Question de cours :

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_n)$ de E est libre lorsque sa seule combinaison linéaire nulle est triviale. Autrement dit :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n \ , \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \right) \implies (\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = 0).$$

Exercice n° 1

Question 1 : A est non-vide car la suite nulle vérifie la relation « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n$ ».
Soit v et w deux suites de A, soit λ et μ deux scalaires. On considère la suite $x = \lambda v + \mu w$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = \lambda v_{n+2} + \mu w_{n+2} = \lambda v_n + \mu w_n = x_n$$

Donc x est dans A et A est stable par combinaisons linéaires.
Finalement, $\boxed{A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Remarque : on pouvait également résoudre la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et obtenir une famille génératrice de A (puis une base après avoir vérifié sa liberté).
L'avantage est qu'on obtient une information supplémentaire : A est un plan vectoriel. Par contre, cela repose sur la méthode de résolution des récurrences linéaires d'ordre 2 et donc ne s'adapterait pas à une récurrence linéaire d'ordre plus élevé.

Question 2 : Notons $P = 2X^3 + 5X$, $Q = X^3 - 2X$, $R = X^2 - X$ et $S = X^2 + 4X$.
On observe que $P - 2Q = 9X$ et $Q - S = -5X$. On en déduit que :

$$\frac{1}{9}(P - 2Q) = \frac{-1}{5}(Q - S) \iff \frac{1}{9}P - \frac{2}{9}Q + \frac{1}{5}Q - \frac{1}{5}S = 0$$

Finalement, $\boxed{\text{la famille } (P;Q;R;S) \text{ admet une combinaison linéaire nulle qui est non triviale : elle est liée}}$.

Question 3 : Notons $P = 1$, $Q = X$, $R = X(X-1)$ et $S = X(X-1)(X-2)$.
La famille $(P;Q;R;S)$ est échelonnée en degré donc elle est libre.
Montrons qu'elle est génératrice de $\mathbb{K}_3[X]$ en prouvant qu'elle génère la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. On a :

$$1 = P \ ;\ X = Q \ ;\ X^2 = R + Q \ ;\ X^3 = S + 3X^2 - 2X = S + 3(R+Q) - 2Q$$

On a donc $\mathbb{K}_3[X] = \text{Vect}(1; X; X^2; X^3) \subset \text{Vect}(P;Q;R;S)$ mais on a aussi $\text{Vect}(P;Q;R;S) \subset \mathbb{K}_3[X]$ donc, par inclusions réciproques, $\text{Vect}(P;Q;R;S) = \mathbb{K}_3[X]$.
Finalement, $\boxed{(P;Q;R;S) \text{ est libre et génératrice de } \mathbb{K}_3[X] \text{, c'en est une base}}$.

Question 4 : Soit $\vec{u} = (x;y;z;t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\vec{u} \in E \iff z = 2x - t \iff \vec{u} = (x;y;2x-t;t) \iff \vec{u} = x(1;0;2;0) + y(0;1;0;0) + t(0;0;-1;1)$$

On en déduit que $E = \text{Vect}((1;0;2;0);(0;1;0;0);(0;0;-1;1))$ et donc $((1;0;2;0);(0;1;0;0);(0;0;-1;1))$ est une famille génératrice de E.
Vérifions que c'est une famille libre. Soit $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\alpha(1;0;2;0) + \beta(0;1;0;0) + \gamma(0;0;-1;1) = (0;0;0;0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Finalement, $\boxed{((1;0;2;0);(0;1;0;0);(0;0;-1;1)) \text{ est une base de } E}$.
Soit $F = \text{Vect}((0;0;1;0))$. Montrons que F est supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
— Les vecteurs de F sont de la forme $\vec{u}(0;0;\lambda;0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Un tel vecteur est dans E si, et seulement si, $2x_u - t_u = z_u \iff \lambda = 0$. On a donc $E \cap F = \{(0;0;0;0)\}$.

— Montrons que $E+F=\mathbb{R}^4$ en montrant que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est dans $E+F$. On a :

$$(1;0;0;0)=\underbrace{(1;0;2;0)}_{\in E}+\underbrace{(-2)(0;0;1;0)}_{\in F}\ ;\ (0;1;0;0)\in E\ ;\ (0;0;1;0)\in F\ ;\ (0;0;0;1)=\underbrace{(0;0;-1;1)}_{\in E}+\underbrace{(0;0;1;0)}_{\in F}$$

On a donc $E+F=\mathbb{R}^4$.
Finalement, $\boxed{F \text{ est bien un supplémentaire de } E \text{ dans } \mathbb{R}^4}$.

$\boxed{\text{Problème 1}}$

Partie A : algorithme de Babylone

On considère les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $p_0=q_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1}=p_n+2q_n \\ q_{n+1}=p_n+q_n \end{cases}$.

1. a) Procédons par récurrence. p_0 et q_0 sont des entiers strictement positifs.
Si p_n et q_n sont des entiers strictement positifs, les relations $p_{n+1}=p_n+2q_n$ et $q_{n+1}=p_n+q_n$ permettent d'assurer que p_{n+1} et q_{n+1} sont également des entiers strictement positifs.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ les nombres } p_n \text{ et } q_n \text{ sont des entiers strictement positifs}}$.

   b) Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ q_n>0$ on a $\forall n,\ p_n+q_n<p_n+2q_n \iff q_{n+1}<p_{n+1}$ donc $\forall n\geqslant 1,\ q_n<p_n$.
On a également $p_0=1=q_0$ donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, q_n\leqslant p_n}$.

2. On définit une nouvelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{p_n}{q_n}$.

   a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a : $u_{n+1}=\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}=1+\dfrac{q_n}{p_n+q_n}\ \boxed{=1+\dfrac{1}{u_n+1}}$.

   b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|1+\frac{1}{u_n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{u_n+2-\sqrt{2}u_n-\sqrt{2}}{u_n+1}\right|=\left|\frac{(u_n-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{u_n+1}\right|=\frac{(\sqrt{2}-1)|u_n-\sqrt{2}|}{|u_n+1|}$$

Comme on sait que $p_n\geqslant q_n>0$ on a $u_n>1$ et donc $\frac{1}{|u_n+1|}=\frac{1}{u_n+1}\leqslant\frac{1}{2}$.
Finalement, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|}$.

   c) En utilisant la relation prouvée à la question précédente, on a :
$|u_1-\sqrt{2}|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_0-\sqrt{2}|$
$|u_2-\sqrt{2}|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_1-\sqrt{2}|\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2|u_0-\sqrt{2}|$
$|u_3-\sqrt{2}|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_2-\sqrt{2}|\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^3|u_0-\sqrt{2}|$
Par récurrence, on obtient : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\sqrt{2}|\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n|u_0-\sqrt{2}|}$.

   d) On a $\left|\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right|<1$ donc $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\to 0$
Il suit, grâce à la relation obtenue à la question précédente, que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

3. a) On a : $\forall n\in\mathbb{N}, p_{n+2}=p_{n+1}+2q_{n+1}=p_{n+1}+2(p_n+q_n)\ \boxed{=\ 2p_{n+1}+p_n}$.

   b) (p_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2-2r-1=0$, elle admet deux racines réelles $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$. Il suit qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\alpha(1-\sqrt{2})^n+\beta(1+\sqrt{2})^n$.
Avec les premiers termes de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :$p_0=1\iff\alpha+\beta=1$: $(\clubsuit)$
On a aussi : $p_1=3\iff\alpha(1-\sqrt{2})+\beta(1+\sqrt{2})=3\iff\underbrace{\alpha+\beta}_{=1}-\sqrt{2}(\alpha-\beta)=3\implies\alpha-\beta=-\sqrt{2}$: $(\spadesuit)$.
Il suit : $(\clubsuit)+(\spadesuit)$: $2\alpha=1-\sqrt{2}\iff\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ puis $\beta=1-\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.
Finalement, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ p_n=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}+\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}}$.

c) On a $|1-\sqrt{2}|<1$ donc $(1-\sqrt{2})^{n+1} \to 0$. Il suit que $\boxed{p_n \sim \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}}$.

4. On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n + 2q_n \iff q_n = \frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$. Avec l'expression de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée à la question précédente, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q_n = \frac{1}{4}\left((1-\sqrt{2})^{n+2} + (1+\sqrt{2})^{n+2} - (1-\sqrt{2})^{n+1} - (1+\sqrt{2})^{n+1}\right) \boxed{= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)}$$

On a donc $\boxed{q_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}}$

5. Par quotient d'équivalents on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p_n}{q_n} \sim \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}} \sim \sqrt{2}$$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}}$.

Partie B : algorithme de Héron

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$.

1. Montrons par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre v_n est bien défini, que $v_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in [1,2]$.
$v_0 = 1$ donc la propriété est vraie.
Supposons que $v_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in [1,2]$ on a alors $v_n \neq 0$ et donc $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right)$ est bien défini. Comme v_n est rationnel alors les nombres $\frac{2}{v_n}$, $v_n + \frac{2}{v_n}$ et v_{n+1} le sont également.
Enfin : $1 \leqslant v_n \leqslant 2 \implies 1 \geqslant \frac{1}{v_n} \geqslant \frac{1}{2}$ et donc $1 \leqslant \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{v_n}\right) \leqslant 2$ c'est-à-dire $v_{n+1} \in [1;2]$.
Finalement, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bien définie de rationnels de } [1;2]}$.

2. On a, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{2}{v_n}\right) - \sqrt{2} = \dfrac{v_n^2 - 2\sqrt{2}v_n + 2}{2v_n}\ \boxed{= \dfrac{\left(v_n-\sqrt{2}\right)^2}{2v_n}}$.

3. On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [1;2]$ donc $|v_n - \sqrt{2}| \leqslant 1$. Avec la relation de la question précédente, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \frac{|v_n-\sqrt{2}|}{2}\frac{|v_n-\sqrt{2}|}{v_n} \boxed{\leqslant \frac{|v_n-\sqrt{2}|}{2}}$$

Une récurrence immédiate nous assure donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^n}|v_0 - \sqrt{2}| \to 0$.
On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{2}}$.

Partie C : Comparaison des vitesses de convergence

On considère pour la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{v_n-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}}$.

1. En se servant des résultats précédents, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n+1} = \frac{v_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\left(v_n-\sqrt{2}\right)^2}{2v_n}}{\frac{(u_n-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{u_n+1}} \boxed{= t_n \times \frac{(u_n+1)(v_n-\sqrt{2})}{2v_n(1-\sqrt{2})}}$$

2. On a $u_n \to \sqrt{2}$ et $v_n \to \sqrt{2}$ donc $\dfrac{(u_n+1)(v_n-\sqrt{2})}{2v_n(1-\sqrt{2})} \to 0$.
Il suit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$ on ait $\left|\frac{(u_n+1)(v_n-\sqrt{2})}{2v_n(1-\sqrt{2})}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
On a alors, pour $n \geqslant N$, $|t_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|t_n|$. On a donc $|t_{N+1}| \leqslant \frac{1}{2}|t_N|$, $|t_{N+2}| \leqslant \frac{1}{2}|t_{N+1}| \leqslant \frac{1}{2^2}|t_N|$ et, en procédant ainsi de suite, $|t_{N+k}| \leqslant \frac{1}{2^k}|t_N|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Pour $n \geqslant N$, on a $n = N+k$ avec $k = n-N$ et on obtient $\boxed{|t_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-N}}|t_N|}$.

3. D'après la question précédente, on a $t_n \to 0$, autrement dit $v_n - \sqrt{2} = o(u_n - \sqrt{2})$.
$\boxed{\text{Cela signifie que } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge plus vite vers } \sqrt{2} \text{ que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$.

$\boxed{\text{Problème 2}}$

Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Préliminaires

1. On a : $\boxed{\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + o(u^4)}$ et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\boxed{(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}u^4 + o(u^4)}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2+1}+x > 0$ donc $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ existe. Par composition, c'est également une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$
3. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout x non nul, on a :
$$f(-x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}\ln(-x+\sqrt{x^2+1})} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+1})} = f(x)$$
Finalement, $\boxed{f \text{ est bien une fonction paire}}$.

Partie A

1. Déterminons la limite de f en 0^+ à l'aide d'un développement limité.
On a, pour $x > 0$, $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{1+x^2} + x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$.
Il suit que $\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{e}$.
Par parité de f, on a aussi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \mathrm{e}$ et donc $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité sur } \mathbb{R} \text{ en posant } f(0) = \mathrm{e}}$.
2. On a vu dans les Préliminaires que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$. En utilisant le développement limité de référence rappelé en Préliminaires on a :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$
Puis, en intégrant : $\boxed{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$.
3. En se servant de la réponse précédente, on a : $\dfrac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{3}{40}x^4 + o(x^4)$.
On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^5)} = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^5)} = \mathrm{e}^1\mathrm{e}^u$ avec $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o(x^5)$.
On utilise le développement $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{1}{2}u^2+o(u^3)$ et il vient : $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^1\left(1 - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{4}{45}x^4\right) + o(x^4)}$.
4. f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.
5. Pour $x \neq 0$, on peut dériver $f(x)$ par opérations :
$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f(x) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = f(x)\left(-\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{f(x)}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$$
$\boxed{\text{Pour } x \neq 0, \text{ on pose } \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \text{ et alors on a bien } f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\varphi(x)}$.

6. On sait que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Regardons si f' est continue en 0. On utilise l'expression trouvée à la question précédente pour étudier le comportement de f' en 0 :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left(x(\sqrt{x^2+1})^{-\frac{1}{2}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{f(x)}{x^2}\left(x(1-\frac{x^2}{2}) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$
$$= f(x)\left(-\frac{x}{3} + o(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0) \qquad (\text{car } f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e})$$

On en déduit que $\boxed{f' \text{ est continue en 0 et } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

7. Pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) = -x^2(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

En ayant remarqué $\varphi(0) = 0$, on peut construire le tableau des signes et des variations suivant :

	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de φ'			$-$		
variations de φ			$\searrow$		
signe de φ		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	

8. Écrivons des développements en $+\infty$. Soit $x > 0$, on a : $\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$.

Il suit que $\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln\left(2x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{1}{4x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right)$.

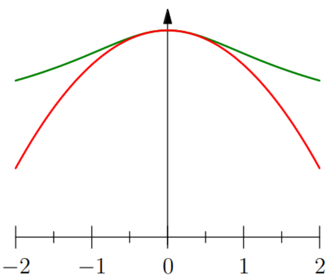
On a donc : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2+1}+x)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(2+\frac{1}{4x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Finalement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ et, par parité de } f,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$.

9. D'après le développement limité en 0,

$$f(x) - \mathrm{e}(1-\frac{x^2}{6}) = \frac{4\mathrm{e}}{45}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Cette expression est positive au voisinage de 0, la courbe est au dessus de la parabole. L'allure de la courbe est donc :



Partie B

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ nulle en 0. On définit la fonction H sur $\mathbb{R}^+$ en posant : $H(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{F(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

1. $\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = F'(0) = f(0) = H(0)$ donc $\boxed{H \text{ est continue en } 0}$.

2. H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, par opérations on a $\forall x > 0,\ H'(x) = H'(x) = \frac{F'(x)-F(x)}{x^2}$.
Intéressons-nous à la régularité en 0. En intégrant un développement limité de f en 0 on a :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}x + o(x^2) \text{ donc } H(x) = \frac{F(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} + o(x)$$

H ayant un développement limité d'ordre 1 en 0 on déduit que $\boxed{H \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } H'(0) = 0}$.

Pour prouver que H' est dérivable en 0, établissons un développement limité de H'. On a :

$$\forall x > 0,\ H'(x) = \frac{F'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{=} \frac{x(\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{6}x^2) - \mathrm{e}x + \frac{\mathrm{e}}{18}x^3 + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0}{=} -\frac{\mathrm{e}}{9}x + o(x)$$

Donc $\boxed{H' \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } H''(0) = -\frac{\mathrm{e}}{9}}$.

3. Pour $x = 0$, $H(x) \geqslant f(x)$ est vraie car $H(0) = f(0)$.

   Pour $x > 0$, montrer $H(x) \geqslant f(x)$ est équivalent à montrer $F(x) - xf(x) \geqslant 0$. Notons $\psi(x) = F(x) - xf(x)$.

   On a : $\forall x \geq 0,\ \psi'(x) = -xf'(x) \leqslant 0$ donc ψ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x > 0,\ \psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$.

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0, \text{ on a bien } H(x) \geqslant f(x)}$.

4. Au voisinage de $+\infty$, on peut écrire : $\displaystyle \frac{1}{x} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x}\left(\ln x + \ln\underbrace{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}_{\longrightarrow \ln 2}\right) \sim \frac{\ln x}{x} \to 0.$

   On en déduit que f tend vers 1 avec $f(x) - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$.
   Considérons $g(x) = F(x) - x - 2\sqrt{x}$.
   Alors $g'(x) = f(x) - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}$ car $\frac{\ln x}{x}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
   g' est donc négatif au voisinage de $+\infty$: Il existe donc $x_0 > 0$ tel que g soit strictement décroissante dans $[x_0, +\infty[$.

   Pour tout $x \geq x_0$, o en déduit $F(x) \leqslant g(x_0) + x + 2\sqrt{x}$ puis $f(x) \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{g(x_0)}{x} + 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

   En passant à la limite, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{H(x) \text{ tend vers } 1 \text{ en } +\infty}$.

Partie C

1. $F' = f \geq 1$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $F(\mathbb{R}^+)$.
   Comme F est continue et croissante, $F(\mathbb{R}^+) = [F(0); \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)[$.
   On a vu que, pour $x \geqslant 0$, on a $F(x) \geqslant xf(x)$ donc on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et $F(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

   $\boxed{\text{Finalement, } F \text{ est une bijection strictement croissante de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}^+\text{, elle admet donc une réciproque qui est également une bijection strictement croissante de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}^+.}$

2. Pour tout réel x positif, on a $F'(x) = f(x) > 0$. Le théorème de la dérivabilité de la bijection réciproque assure que G est dérivable et $\forall t \geq 0,\ G'(t) = \dfrac{1}{F'(G(t))} = \dfrac{1}{f(G(t))}$.

   Remarquons que $G(0) = 0$ car $F(0) = 0$ et, pour $u > 0$, appliquons le théorème des accroissements finis à G dans $[0, u]$. Il existe $c \in]0, u[$ tel que $G(u) - G(0) = uG'(c) = \frac{u}{f(v)}$ en posant $v = G(c)$. Comme G est décroissante, $v \in]0, G(u)[$ et vérifie la formule de l'énoncé.

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } u > 0, \text{ il existe } v \text{ dans }]0, G(u)[\text{ tel que } \dfrac{G(u)}{u} = \dfrac{1}{f(v)}}$.