PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 5, proposé le 25/1/2020

Exercice n° 1

1. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
   Le cardinal d'une partie de E est dans $[\![0;n]\!]$ et, pour une valeur de $k \in [\![0;n]\!]$, il y a exactement $\binom{n}{k}$ parties de E qui ont pour cardinal k.
   On en déduit que $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} 4^{\#X} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k1^{n-k} = (4+1)^n = \boxed{5^n}$.
2. On applique l'algorithme d'Euclide à 253 et 17, puis on « remonte » :

$$\begin{array}{ll} 253 = 17\times 14 + 15 & = (253 - 17\times 14)8 - 17\times 7 = 253\times 8 - 17\times 119 \\ 17 = 15 + 2 & = 15 - (17-15)5 = 15\times 8 - 17\times 7 \\ 15 = 2\times 7 + \boxed{1} & \boxed{1} = 15 - 2\times 7 \end{array}$$

   Finalement, on a $\boxed{1 = 253\times 8 - 17\times 119}$
3. On travaille avec la matrice du système (qui est homogène, il n'y a donc pas besoin de colonne augmentée) :
   On échelonne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{22}{3} & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{22}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{22}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

   On a donc $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{7}z - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{22}{7}z - \frac{3}{7}t \end{cases}$. Le vecteur (x,y,z,t) est solution de $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $(x,y,z,t) = z(-\frac{3}{7},\frac{22}{7},1,0) + t(-\frac{5}{7},-\frac{3}{7},0,1) = \frac{z}{7}(-3,22,7,0) + \frac{t}{7}(-5,-3,0,7)$.
   $\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions de } \mathcal{S} \text{ est } Vect((-3,22,7,0),(-5,-3,0,7))}$

Exercice n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut compter le nombre de façons différentes de monter un escalier de n marches si on peut faire des pas de 1 ou de 2 marches ; on appelle ce nombre X_n.

1. — Clairement, il n'y a qu'une façon de monter un escalier d'une marche : $\boxed{X_1 = 1}$.
   — Pour un escalier de deux marches, soit on monte en deux pas d'une marche, soit en un pas de deux marches : $\boxed{X_2 = 2}$.
   — Pour un escalier de trois marches, soit on monte en trois pas d'une marche, soit en un pas de deux marches puis un pas d'une marche ou encore un pas d'une marche suivi d'un pas de deux marches : $\boxed{X_3 = 3}$.
   — Pour un escalier de quatre marches, on peut faire quatre pas d'une marche, deux pas d'une marche et un pas de deux marches (il y a alors trois façons de procéder, suivant que le pas de deux marches soit le premier, le deuxième ou le troisième pas) ou enfin deux pas de deux marches. Au final $\boxed{X_4 = 5}$.
2. Soit $n \geq 3$. Pour monter un escalier de n marches, soit on commence par un pas d'une marche, soit par un pas de deux marches. Dans le premier cas, il reste $n-1$ marches à monter et il y a X_{n-1} façons de procéder ; dans le second cas il reste $n-2$ marches et donc X_{n-2} façons de procéder.
   Au final, on a : $\boxed{\forall n \geq 3,\ X_n = X_{n-1} + X_{n-2}}$.
3. La relation $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$ est vraie au rang $n = 2$ si, et seulement, si :

$$X_2 = X_1 + X_0 \iff 2 = 1 + X_0 \iff \boxed{X_0 = 1}.$$

4. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire du second ordre, son polynôme caractéristique $R^2 - R - 1$ a pour racines $R_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $R_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il suit qu'il existe des réels α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_n = \alpha R_1^n + \beta R_2^n$.
   Pour $n = 0$, on obtient $1 = \alpha + \beta \iff \alpha = 1 - \beta$: (1).
   Pour $n = 1$, on obtient $1 = \alpha R_1 + \beta R_2 \iff 2 = \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5})$. En se servant de (1) il vient :

$$2 = (1-\beta)(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) \iff 1 - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}\beta \iff \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \iff \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

   On en déduit $\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

Remarques :

a) La suite de Fibonacci vérifie la même relation de récurrence mais avec les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. En un sens, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci avec un décalage : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = Fn + 1$.

b) On a créé X_0 pour que les conditions initiales soient plus simples à utiliser. *(Voyez-vous bien pourquoi ?)*

Exercice n° 3

1. $\boxed{\text{La fonction nulle vérifie } (\star) \text{ et est continue, c'est donc un élément de } \Omega \text{ qui n'est pas vide}}$.
2. Soit $f \in \Omega$. f est donc solution de $(\star)$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Avec $x = y = 0$, il vient $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
   On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x)+f(-x)$ ce qui donne $f(x) = -f(-x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
3. Par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)}$.
   Pour étendre ce résultat à $\mathbb{Z}$ on utilise l'imparité de f : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(-n) = -f(n) = -nf(1)$ et donc on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)}$.
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe des entiers $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. On a alors $qf(r) = f(qr) = f(p) = pf(1)$ et donc, en divisant par q, on a $f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$. On a bien $\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales de x.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. On a, par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$: (2).
   Par ailleurs, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de décimaux, donc de rationnels, et on peut appliquer le résultat de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n f(1)$.
   Il suit, d'après (2) et par opérations sur les limites :
   $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n f(1) = f(1) \lim_{n\to+\infty} x_n = xf(1).$$
   On a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xf(1)}$.
6. $\boxed{\text{Si } f \text{ est dans } \Omega \text{ alors } f \text{ est de la forme } x \longmapsto xf(1) \text{ soit une fonction linéaire}}$.
7. Réciproquement, soit une fonction linéaire $f : x \mapsto \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; vérifions que f est solution de $(\star)$:
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = f(x) + f(y)$$
   Finalement, $\boxed{\Omega \text{ est l'ensemble des fonctions linéaires}}$.

Exercice n° 4

L'objet de cet exercice est de chercher à résoudre l'équation différentielle (E) : $|x|y' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $x > 0$, (E) est équivalente à $y' + (1 - \frac{1}{x})y = x^2$: (E^+).
   Les solutions de l'équation homogène associée à (E^+) sont de la forme $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On cherche une solution particulière de (E^+) qui soit polynômiale de degré 2 ; on trouve que $x \mapsto x^2 - x$ convient. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}^+ = \left\{x \longmapsto \lambda x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x / \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$.
   (Les fonctions de $\mathcal{S}^+$ sont définies sur $\mathbb{R}^{+*}$).
2. a) Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$ on a (E) qui devient $-xy' + (x-1)y = x^3 \iff y' + (\frac{1}{x} - 1)y = -x^2$: (E^-).
   On vérifie que $f : x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est solution de (E^-) :
   $$f' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) f = 2x + 3 - \frac{6}{x^2} + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right) = -x^2$$
   b) Les solutions de l'équation homogène associée à (E^-) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{-*}$ par une expression de la forme $x \mapsto \mu\mathrm{e}^{x - \ln|x|} = -\mu\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. En posant $\alpha = -\mu$ on obtient $x \mapsto \alpha\frac{\mathrm{e}^x}{x}$
   Finalement, $\boxed{\mathcal{S}^- = \left\{x \longmapsto \alpha\frac{\mathrm{e}^x}{x} + x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} / \alpha \in \mathbb{R}\right\}}$.
   (Les fonctions de $\mathcal{S}^-$ sont définies sur $\mathbb{R}^{-*}$).

3. Une solution sur $\mathbb{R}$?

(a) Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors f est une solution de (E^+) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de (E^-) sur $\mathbb{R}^{-*}$. Il suit que $f_{|\mathbb{R}^{+*}} \in \mathcal{S}^+$ et $f_{|\mathbb{R}^{-*}} \in \mathcal{S}^-$. Autrement dit : f doit être une fonction définie par morceaux avec un élément de $\mathcal{S}^+$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et un élément de $\mathcal{S}^-$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

(b) — Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x\to 0} \lambda x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x = 0$.

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x < 0$ on a : $\alpha\frac{\mathrm{e}^x}{x} + x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} = x^3 + 3x + 6 + \frac{6+\alpha\mathrm{e}^x}{x}$.
Si $\alpha \neq -6$, par opération sur les limites, on a une limite infinie ($\pm\infty$ selon si $\alpha > -6$ ou $\alpha < -6$).
Si $\alpha = -6$, en utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, il vient un limite nulle.

(c) D'après la question précédente, pour avoir un recollement continu en 0, on peut prendre nimporte quel élément de $\mathcal{S}^+$ mais on n'a pas le choix pour $\mathcal{S}^-$: il faut prendre $-6\frac{\mathrm{e}^x}{x} + x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$. Il faut alors poser $0 \mapsto 0$ et on a une fonction continue.

Une telle fonction est de la forme : $\boxed{f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 6\frac{1-\mathrm{e}^x}{x} + x^2 + 3x + 6 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

(d) Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1 + \frac{x^2}{2}$.
$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -x\mathrm{e}^x + x = x(1 - \mathrm{e}^x)$.
Soit $x \leq 0$, sur $[x; 0]$ on a $|\varphi'(t)| = |t(1 - \mathrm{e}^t)| = |t|(1 - \mathrm{e}^t) \leq |x|(1 - \mathrm{e}^x)$.
On a donc, grâce à l'inégalité des accroissements finis :

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x|(1 - \mathrm{e}^x)|x - 0| \iff |\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq x^2(1 - \mathrm{e}^x)\ (\star).$$

(e) On a vu que les fonctions f_λ définies précédemment sont continues sur $\mathbb{R}$, solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Il nous reste à nous assurer qu'une telle fonction est dérivable en 0 et qu'elle est solution de l'équation (E) en 0.

Pour $x \neq 0$, f_λ est dérivable et on a :
— Si $x > 0$: $f'_\lambda(x) = \lambda\mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 2x - 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'_\lambda(x) = \lambda - 1$.
— Si $x < 0$: $f'_\lambda(x) = 6\frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{x^2} + 2x + 3$. Pour trouver la limite de f'_λ en 0^-, on se sert de $(\star) \iff |\frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}| \leq (1 - \mathrm{e}^x)$ ce qui nous permet de déduire que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ puis de conclure que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'_\lambda(x) = 0$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction f_λ est dérivable en 0 si, et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^-} f'_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'_\lambda(x) \iff \lambda = 1$.

Finalement, la fonction $f_1 = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 6\frac{1-\mathrm{e}^x}{x} + x^2 + 3x + 6 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$. par construction.
On vérifie qu'elle est également solution de l'équation pour $x = 0$: (E) devient $f_1(0) = 0$ qui est vraie.

$\boxed{\text{Finalement, } (E) \text{ n'admet qu'une solution sur } \mathbb{R}\text{, la fonction } f_1.}$

Exercice n° 5

L'objet de cet exercice est d'observer les propriétés de régularité d'une fonction dérivée.

1. Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x} \end{cases}$

a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |\sin\frac{1}{x}| \leq 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \leq |x^2|$ ce qui entraine $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Finalement, $\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 0}$

b) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ (même argument que pour la limite à la question précédente).
Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.

c) Pour voir si f' est continue en 0, déterminons $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et regardons la limite de $f'(x)$ en 0.
f est clairement dérivable en $x \neq 0$ et, par opérations, il vient : $\forall x \neq 0,\ f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. On

a $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ce qui implique que $f'(x)$ non plus.

Finalement, $\boxed{f' \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ mais n'est pas continue en } 0.}$

2. On dit d'une fonction f définie sur un intervalle I qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires lorsque, pour tous $a < b$ dans I, pour tout λ entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet au-moins une solution $x \in [a;b]$.

   a) Tout d'abord, si une fonction est continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est le TVI !
   Considérons à présent g. Si on choisit $a < b$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou dans $\mathbb{R}^{-*}$ alors g est continue sur $[a;b]$ et donc, pour tout λ entre $g(a)$ et $g(b)$, il existe une solution $c \in [a;b]$ à $f(x) = \lambda$.
   Supposons $a \leq 0 \leq b$ (avec $a \neq b$) ; soit λ entre $g(a)$ et $g(b)$. On a $\lambda \in [-1;1]$, on note $\theta = \text{Arccos}\,\lambda$. On a, $\forall n \in \mathbb{N},\ g(\frac{1}{\theta+2n\pi}) = \cos(\theta + 2n\pi) = \lambda$. $a \neq b$ donc, a et b ne sont pas tous les deux nuls, supposons $b > 0$ (c'est analogue si $a < 0$), on a $\frac{1}{\theta+2n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe un rang n_0 tel que $0 < \frac{1}{\theta+2n_0\pi} < b$ et, $\frac{1}{\theta+2n_0\pi}$ est une solution de $f(x) = \lambda$ dans $[a;b]$.
   Finalement, $\boxed{g \text{ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires}}$.

   b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$. Soit donc $a < b$, on va supposer soit λ entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On introduit deux nouvelles fonctions définies sur $[a;b]$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(a) \text{ si } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \begin{cases} f'(b) \text{ si } x = b \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \text{ sinon.} \end{cases}$$

      i. φ est continue et dérivable sur $]a;b]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]a;b]$ (avec le dénominateur qui ne s'annule pas). Par définition, φ est continue en a.
      On traite ψ de façon analogue.

      ii. La fonction φ est continue, l'image de $[a;b]$ par φ est donc un intervalle. $\varphi(a) = f'(a)$ et $\varphi(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on en déduit que les valeurs entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sont dans $\varphi([a;b])$.
      En raisonnant de façon analogue, les valeurs entre $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sont dans $\psi([a;b])$.
      Or, λ est entre $f'(a)$ et $f'(b)$, λ est donc entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou bien entre $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (ou encore : les deux). Cela permet de conclure que λ est dans $\varphi([a;b])$ ou (non exlusif) $\psi([a;b])$.

      iii. Mettons que $\lambda \in \varphi([a;b])$. Si $\lambda = \varphi(a) = f'(a)$ alors a est une solution à $f'(x) = \lambda$. Sinon, il existe $c \in]a;b]$ tel que $\varphi(c) = \lambda$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[a;c]$ nous assure qu'il existe un $d \in [a;c]$ tel que $f'(d) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \varphi(c) = \lambda$.
      Finalement, $\boxed{f' \text{ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.}}$

Nous avons dans un premier temps vu qu'une dérivée n'est pas nécessairement continue. Dans un second temps, nous avons démontré le ***Théorème de Darboux*** *: une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*