PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 6 5/3/2022

4 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page). Il est vivement conseillé de commencer par l'exercice 1.
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez seront valorisées même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Barème prévisionnel : 10 points pour chaque exercice ; 15 points pour le Problème.
1 point pour l'aspect de la copie, 1 point pour utiliser $\forall$.

Dans ce devoir, comme dans tous les autres, vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question (même non abordée) pour traiter les questions suivantes.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Question 2 : L'ensemble des suites arithmétiques est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Question 3 : La famille $(\cos\ ;\ x \overset{f}{\mapsto} \cos(2x)\ ;\ x \overset{g}{\mapsto} \cos(3x))$ est-elle libre ou liée ?

Question 4 : Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^3+3}{X^3+X+2}$.

Question 5 : Déterminer deux nombres a et b tels que $a+b = 2\mathrm{i}$ et $ab = \mathrm{i}$.

Exercice n° 2

L'objet de cet exercice est de chercher à résoudre l'équation différentielle (E) : $|x|y' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$, on appelle $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des solutions trouvées.
2. a) Vérifier que $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.

   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$, on appelle $\mathcal{S}^-$ l'ensemble des solutions trouvées.
3. <u>Une solution sur $\mathbb{R}$?</u>
   (a) Supposons qu'il existe une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$. Quel lien f aurait-elle avec $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$?

   (b) Etudier les limites en 0 des éléments de $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$.

   (c) Est-il possible d'avoir un recollement entre une fonction de $\mathcal{S}^+$ et une fonction de $\mathcal{S}^-$ qui soit prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner l'expression d'un tel recollement.

   (d) A l'aide des accroissements finis, montrer que $\forall x \leq 0,\ |\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq (1-\mathrm{e}^x)x^2$.

   (e) En déduire qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 3

On rappelle que les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

La fonction tangente hyperbolique, notée th, est définie par $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.

1) Justifier que th est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.
3) Justifier que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

On appelle fonction argument tangente hyperbolique, notée argth, la bijection réciproque de th.
Pour tout $y \in]-1,1[$, $\mathrm{argth}(y)$ est donc l'unique réel dont la tangente hyperbolique est y.

4) Donner les variations et les limites de argth en justifiant les résultats.
5) Justifier que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall y \in]-1,1[,\ \mathrm{argth}'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.
6) Soit $(y_1, y_2) \in (]-1,1[)^2$. Montrer que $\dfrac{y_1+y_2}{1+y_1y_2} \in]-1;1[$.
7) On admet que $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{th}(x_1+x_2) = \dfrac{\mathrm{th}(x_1)+\mathrm{th}(x_2)}{1+\mathrm{th}(x_1)\,\mathrm{th}(x_2)}$.

   Démontrer que $\forall (y_1, y_2) \in (]-1,1[)^2, \mathrm{argth}(y_1) + \mathrm{argth}(y_2) = \mathrm{argth}\left(\dfrac{y_1+y_2}{1+y_1y_2}\right)$.

Problème

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 2X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

1. a) Calculer P_2, P_3 et P_4.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit α_n, β_n et γ_n par $\alpha_n = P_n(0), \beta_n = P_n(1)$ et $\gamma_n = P_n(-1)$.
      i. Déterminer α_{2n} en fonction de n ; puis α_{2n+1} en fonction de n.
      ii. Démontrer que la suite $(\beta_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et que ses termes s'ecrivent de la forme $an + b$ avec a et b des réels à déterminer.
      iii. De façon analogue, déterminer une expression de γ_n en fonction de n.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, P_n est de degré n et déterminer une expression de d_n, le coefficient dominant de P_n.
3. a) Prouver par récurrence (sur deux rangs) que pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sin((n+1)\theta)$.
   b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sin((n+1)\theta).$$

   c) À l'aide de la relation obtenue en 3.a), retrouver les valeurs de α_n et de β_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) À l'aide de $P_n(\cos(\theta))$, déterminer les racines du polynômes P_n qui appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$.
   b) En déduire la décomposition de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
   c) En considérant le produit des racines de P_n, déduire l'égalité :

   $$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$