

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaître sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Au sein d'un exercice, les questions doivent être traitées dans l'ordre.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

Notations : $[a; b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, n un entier naturel non nul.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si, et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$.
2. Soit f une fonction définie et continue sur $[a; b]$ et à valeurs dans $[a; b]$.
L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.
3. Soit f et g des fonctions définies et continues sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ alors, pour tout $x \in [a; b]$, on a $f(x) > g(x)$.
4. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions :
$$x \mapsto k \exp(2x) + 1$$

où k désigne un nombre réel quelconque.
5. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(-7)^n}$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement plus grand que 1.
6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
8. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 2| = |z + 1|$ est réduit au point d'affixe $\frac{1}{2}$.
9. Si A et B sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes telles que $AB = 0$, alors A ou B n'est pas inversible.
10. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ont le même rang.

Exercice n° 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$$

1. Calcul de u_1 .

a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}$$

b) En déduire que $u_1 = \alpha \ln(2) + \beta \pi$ avec α et β des réels dont on précisera les valeurs.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq 1$.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer.

3. Etude de la série $\sum u_n$.

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

4. Etude de la série $\sum \frac{u_n}{n}$

(a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1})$$

(b) En déduire que $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

(c) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ en fonction de ℓ .

Exercice n° 3

Les parties de cet exercice sont indépendantes, sauf la première question de la partie C qui nécessite un résultat de la partie B.

Partie A : une équation différentielle

- 1) Résoudre l'équation $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$, où y est une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.

- 2) a. Donner le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
b. En déduire le développement limité de $\arctan$ au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- 3) Prouver que f se prolonge par continuité de 0, que ce prolongement (qu'on note également f) est dérivable en 0, préciser $f(0)$, $f'(0)$ et la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0 au voisinage de 0.
- 4) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 5) Etudier les variations et les limites de f puis dresser son tableau de variations.

Partie C : calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie, on étudie l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$ dont on cherche une approximation.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; 1]$ on pose $r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt$ et $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$.

- 6) Justifier que I est bien définie.
- 7) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
- 8) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0; 1]$ on a :

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$ on a : $xs'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x)$.

- 9) Ecrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que :

$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1)$.

- 9) Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de I à 10^{-4} près.
- 10) Ecrire le code Python d'une fonction `approche_I` qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice n° 4

Le but de cet exercice est l'étude de l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n un entier fixé non nul par :

$$\phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre de calculer des sommes d'entiers.

On note, pour tout k entier non nul, ϕ^k la composée k -ième de l'application ϕ .

Partie A : Préliminaires

- 1) On note $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.
Montrer que $\phi(P_0)(X) = 0$, $\phi(P_1)(X) = 1$ et $\phi(P_2)(X) = 2X + 1$.
- 2) Calculer $\phi(P_3)$, $\phi^2(P_3)$ et $\phi^3(P_3)$.
- 3) Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 4) Énoncer la formule du binôme de Newton.
- 5) Montrer que pour tout polynôme P , non constant de degré k avec k un entier non nul, $\phi(P)$ est un polynôme de degré $k - 1$.
- 6) Déterminer le noyau et l'image de ϕ .
- 7) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\phi(Q) = P$. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^n P(i) = Q(n+1) - Q(0)$$

Partie B : Une famille de polynômes

Considérons la famille $(H_i)_{i \in [0;n]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$H_0 = P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [1;n], \quad H_i(X) = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} (X - k)}{i!} = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}$$

- 8) Prouver que $(H_i)_{i \in [0;n]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 9) Montrer que pour tout i entier entre 1 et n on a $H_i(0) = 0$.
- 10) Montrer que pour tout i entier entre 1 et n on a $\phi(H_i) = H_{i-1}$ et que $\phi^i(H_i) = 1$.
- 11) Prouver que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit (de façon unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \phi^k(P)(0) H_k(X)$$

- 12) Donner la décomposition de X^2 dans la base $(H_i)_{i \in [0;n]}$.
- 13) En utilisant plusieurs questions précédentes, prouver que : $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 14) Donner une formule pour $\sum_{k=0}^n k^3$.