PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 6 13/3/2021

4 heures

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Les questions sont de difficulté variable. Certaines sont difficiles, les idées que vous aurez indiquées sur la copie seront valorisées, même si elles n'aboutissent pas.
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Question 1 : Linéariser $\sin^3 x$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

Question 2 : Délinéariser $\sin(3x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

Question 3 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

Question 4 : Décider si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Le cas échéant, donner son inverse.

Question 5 : En utilisant la méthode de votre choix, déterminer le développement limité à l'ordre 5 de Arccos en 0.

Question 6 : On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+5x^2+x}$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a) Prouver que $\mathcal{C}$ admet une asymptote pour $x \to +\infty$.

b) Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ de de son asymptote.

Question 7 : On considère $\Gamma = \big\{(x;y;z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ 2y = 3z\big\}$.

a) Prouver que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

b) En donner une base et un supplémentaire.

Exercice n° 2

On travaille dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^3$ et on considère l'ensemble :

$$\Gamma = \big\{(x;y;z) \in \mathbb{K}^3 / x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\big\}.$$

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que Γ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Exercice n° 3

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation :

$$P(X^2) = P(X)P(X+1) \ : (\star).$$

1. Traiter le cas des polynômes constants.
2. Supposons qu'il existe un polynôme non-constant P qui vérifie la relation $(\star)$.
   Prouver par l'absurde que 2 n'est pas une racine de P.
3. Supposons que P ait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Prouver que $|\alpha| \in \{0;1\}$.
4. Montrer que toutes les racines de P sont contenues dans l'ensemble $\{0;1;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}};\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\}$.
5. Justifier que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ne sont pas racines de P.
6. Trouver les polynômes non-constants qui vérifient $(\star)$ puis conclure.

Problème : intégrales de Wallis et formule de Stirling

L'objectif de ce problème est de prouver : $\boxed{n! \ \sim \ \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (Stirling).

Dans une premère partie, on introduit les intégrales de Wallis et on en étudie quelques propriétés.

La seconde partie est dévolue à la preuve de la formule de Stirling. Certains résultats de la première partie seront utilisés à la fin du raisonnement mais les deux parties sont largement indépendantes.

Partie A : Intégrales de Wallis

Définition
Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$ est appelée intégrale de Wallis d'indice n et notée W_n.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Etudier les variations de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
5. Démontrer, en se servant des questions précédentes, que $W_{n+1} \sim W_n$.
6. Prouver par récurrence une des deux formules ci-dessous :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$$ (Première formule de Wallis)

7. A l'aide des deux questions précédentes, montrer que $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p(2p)!^2} = \pi}$ (Deuxième formule de Wallis).

Partie B : Formule de Stirling

1. Dans cette question on montre que $n!$ admet un équivalent de la forme $\lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On utilisera les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n \quad ; \quad b_n = \ln(a_n) \quad ; \quad c_n = \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}a_n\right)$$

   a) Démontrer que $\forall n > 0,\ b_{n+1} - b_n = 1 - (n + \frac{1}{2})\ln(1 + \frac{1}{n})$.
   b) En utilisant un développement limité usuel, déduire de la question précédente que $b_{n+1} - b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.
   c) Démontrer que $\forall n > 0,\ c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n(n+1)} + b_{n+1} - b_n$ puis que $c_{n+1} - c_n \sim \frac{11}{12n^2}$.
   d) Justifier que les suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ sont adjacentes à partir d'un certain rang et en déduire que $(a_n)_{n>0}$ converge vers un réel $\lambda > 0$.
   e) Justifier que $n! \sim \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
2. Utiliser la question précédente et la deuxième formule de Wallis pour établir la formule de Stirling.