

# PCSI - Corrigé de l'épreuve de maths du concours blanc

## Exercice n° 1

*Issu des sujets de CAPES externe 2022 et 2023*

1. Faux. Un contre-exemple est fourni par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ .  
On a  $f(2) = 0$  et  $f(-2) = 4$  donc  $f$  n'est pas paire.  
  
Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est paire si, et seulement si, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(-x)$ . et donc  $f$  n'est pas paire si, et seulement si, il existe un réel  $x$  tel que  $f(x) \neq f(-x)$ .
2. Vrai.  $f$  est continue sur  $[a; b]$  donc  $g(x) = f(x) - x$  l'est aussi. On a  $\forall x \in [a; b]$ ,  $a \leq f(x) \leq b$  donc  $0 \leq g(a)$  et  $g(b) \leq 0$ . Le Théorème des Valeurs Intermédiaires s'applique à  $g$  sur  $[a; b]$  : il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $g(c) = 0$  ce qui est équivalent à  $f(c) = c$ .  
Finalement, l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$ .
3. Faux. Comme contre-exemple, on peut prendre l'intervalle  $[0; 2\pi]$ ,  $f(x) = x$  et  $g = \cos$ .  
On a  $\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 2\pi > \int_a^b g(x) \, dx = 0$  alors que  $f(0) = 0 < g(0) = 1$ .
4. Faux. La fonction  $x \mapsto e^x + 1$  est une solution de  $y'' - 3y' + 2y = 2$  qui n'est pas de la forme indiquée.  
Plus précisément, l'équation différentielle  $y'' - 3y' + 2y = 2$  est une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants, dont les solutions sont les fonctions :  
$$x \mapsto k \exp(2x) + \lambda \exp(x) + 1$$
  
où  $k$  et  $\lambda$  désignent des nombres réels quelconques.
5. Faux. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \dots + \frac{1}{(-7)^n}$  est la série géométrique  $\sum (\frac{1}{-7})^n$ . Sa raison est de module  $< 1$  et donc elle converge. Sa limite est  $\frac{1}{1 - \frac{1}{-7}} = \frac{7}{8}$  qui est strictement inférieur à 1.
6. Faux. Comme contre-exemple, on peut prendre la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 1 + \frac{1}{e^n}$ .  
 $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et positive donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante strictement positive, donc minorée par 0.  
Or,  $(\frac{1}{e^n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.
7. Faux. Comme contre-exemple, on peut considérer la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$ .  
On a :  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 1 et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $-1$  mais  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.
8. Faux. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, notons  $A$ ,  $B$  et  $M$  les points d'affixes respectives 2,  $-1$  et  $z$ . L'équation  $|z - 2| = |z + 1|$  se reformule en  $AM = BM$ .  
Il suit que l'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que  $|z - 2| = |z + 1|$  est la médiatrice du segment  $[A; B]$ .
9. Vrai. Si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées  $n \times n$  inversibles alors  $AB$  l'est également (et son inverse est  $B^{-1}A^{-1}$ ). Or la matrice nulle n'est pas inversible donc, si  $AB = 0$ , alors  $A$  ou  $B$  n'est pas inversible.
10. Vrai. Les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  sont de rang 1. En effet, notons  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}(X, X) = \text{rg}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg}(X, 2X) = \text{rg}(X) = 1$$

1. Calcul de  $u_1$ .

- a) Il s'agit de faire une décomposition en éléments simples, puis de présenter le résultat d'une façon facile à intégrer. On effectue les calculs et on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+t} + \frac{-\frac{1}{6}(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{\frac{1}{2}}{t^2-t+1}$$

- b) Il suit :  $u_1 = \frac{1}{3}[\ln(1+t)]_0^1 - \frac{1}{6}[\ln(t^2-t+1)]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt$ . Les deux crochets valent respectivement  $\ln(2)$  et 0, avec deux changements de variables, on calcule l'intégrale qui vaut  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

On en déduit que 
$$u_1 = \frac{1}{3} \ln(2) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \pi.$$

2. Etude de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- a)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], 1 \leq (1+t^3)^n \leq 2^n$  donc  $0 \leq \frac{1}{(1+t^3)^n} \leq 1$  : (\*) et, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

- b) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est minorée par 0.

En utilisant (\*) et la croissance de l'intégrale, on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée, elle converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .

3. Etude de la série  $\sum u_n$ .

- a) On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt = \left[ \frac{1}{-n+1} (1+t)^{-n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{-n+1} (2^{-n+1} - 1) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Finalement, on a bien 
$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

- b) Soit  $n \geq 1$ . Pour  $t \in [0; 1]$ , on a  $1 \leq 1+t^3 \leq 1+t$  et donc  $\frac{1}{(1+t^3)^n} \geq \frac{1}{(1+t)^n}$  ce qui entraîne, par croissance de l'intégrale,  $u_n \geq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt$ . Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum \left( \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} dt \right)$  a même nature que  $\sum \frac{1}{n}$  qui est une série de Riemann divergente. On en déduit que la série  $\sum u_n$  diverge (vers  $+\infty$ ).

4. Etude de la série  $\sum \frac{u_n}{n}$ 

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour intégrer  $u_n = \int_0^1 (1+t^3)^{-n} dt$  par parties, posons pour  $t \in [0; 1]$  :

$$\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = (1+t^3)^{-n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = -n3t^2(1+t^3)^{-n-1} \end{cases}.$$

$f$  et  $g$  sont bien des fonctions de  $\mathcal{C}^1([0; 1])$  et on a :

$$u_n = [t(1+t^3)^{-n}]_0^1 + 3n \int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Dans l'intégrale, en écrivant  $t^3 = (1+t^3) - 1$  il vient :

$$u_n = \frac{1}{2^n} + 3n \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n} - \frac{1}{(1+t)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 3n(u_n - u_{n+1})$$

Finalement, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a bien  $u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1})$  avec  $a_n = \frac{1}{2^n}$  et  $b_n = 3n$ .

(b)  $\sum \frac{u_n}{n}$  est une série à termes positifs, son terme général vaut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n2^n} + 3(u_n - u_{n+1})$$

— Pour tout  $n > 0$ ,  $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ .

Comme  $\sum \frac{1}{2^n}$  est une série géométrique convergente, on déduit que  $\sum \frac{1}{n2^n}$  converge.

— Pour tout  $n > 0$ ,  $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1} \longrightarrow u_1 - \ell$  qui est réel.  $\sum (u_n - u_{n+1})$  est donc une série convergente.

Par somme, on en déduit que  $\boxed{\sum \frac{u_n}{n} \text{ est une série convergente.}}$

(c) On poursuit le travail de la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = \ln(2) + 3(u_1 - \ell) = \boxed{2\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\pi - 3\ell}$$

### Exercice n° 3

*Adapté du concours ATS 2022*

#### Partie A : une équation différentielle

1) L'équation (E) :  $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)}$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Son équation homogène est  $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$ , elle a pour solution les fonctions de la forme  $y(x) = \frac{\lambda}{x}$  où  $\lambda$  est un réel.

On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante : soit, pour  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$  avec  $\lambda(x)$  une fonction dérivable à déterminer.  $f$  est solution de  $E$  si, et seulement si :

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} + \frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} \iff \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On prend  $\lambda(x) = \arctan(x)$  et  $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$  est une solution particulière de (E).

Finalement,  $\boxed{\text{les solutions de (E) sont les fonctions définies pour } x > 0 \text{ par } y(x) = \frac{\lambda + \arctan(x)}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$

#### Partie B : étude d'une fonction

2) a. On a  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (-x^2) + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \boxed{1 - x^2 + o(x^2)}.$

b. On intègre le développement limité précédent :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \boxed{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

$$\text{On en déduit : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \boxed{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}.$$

3)  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 0x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$ . On en déduit que

$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité de 0 en posant } f(0) = 1, \text{ ce prolongement est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$

La tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0 est la droite horizontale  $y = 1$ .

On a :  $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$  donc  $f(x) - 1$  est négatif pour  $x$  qui est voisin de 0.

On en déduit que  $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessous de la droite } y = 1 \text{ au voisinage de } x = 0.}$

4) Pour  $x \neq 0$ , on peut calculer  $f'(x)$  par opérations :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{x \arctan'(x) - \arctan(x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}{x^2} = \boxed{\frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}}$$

Par opérations,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur tout intervalle de  $\mathbb{R}^*$  et on a déjà vu que  $f$  est dérivable en 0 ; il ne manque donc que la continuité de  $f'(0)$  pour pouvoir déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . On a :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - (1+x^2)(x+o(x^2))}{x^2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + o(x^2)}{x^2(1+x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x + o(1)}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$$

On a bien  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$  donc  $f'$  est continue en 0. Finalement,  $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ .

5) La fonction  $f$  est paire, il suffit donc d'étudier ses variations sur  $\mathbb{R}^+$  et sa limite en  $+\infty$  pour déduire son tableau de variations complet.

Pour  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{x^2(1+x^2)}$  est du signe de  $N(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ .

$N$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N'(x) = 1 - 2x \arctan(x) - 1 = -2x \arctan(x)$$

$N(x)$  est donc strictement négatif pour  $x > 0$  on en déduit que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

On dresse le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  et on complète par parité :

| $x$     | $-\infty$                                                           | 0 | $+\infty$ |
|---------|---------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $f'(x)$ |                                                                     | + | -         |
| $f$     | <div style="text-align: center;"> <math>f(0) = 1</math><br/> </div> |   |           |

### Partie C : calcul approché d'une intégrale

6) On a vu à la question B3) que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $[0; 1]$ . On en déduit que  $\boxed{I \text{ est bien définie}}$ .

7) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0; 1]$ , on a :  $|r_n(x)| \leq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n} dt$ .

$$\text{Or, } \int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ on a bien : } \boxed{|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}.$$

8) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0; 1]$  on a :

$$(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2})(1 + t^2) = 1 - (-1)^n t^{2n} \quad (\text{par télescopage})$$

$$\text{donc, puisque } 1 + t^2 \neq 0, \boxed{1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}}.$$

$$\text{Il suit que } r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} - (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2}) dt.$$

On sépare l'intégrale en deux et on obtient  $r_n(x) = \arctan(x) - x s'_n(x)$ .

$$\text{Finalement, on a bien : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in [0; 1], x s'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x)}.$$

9) On a, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $s_n$  qui est une fonction polynômiale et donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et donc dérivable.

De plus,  $s_n(0) = 0$  et donc on peut écrire  $s_n(1) = \int_0^1 s'_n(t) dt$ . Il suit :

$$\begin{aligned} |s_n(1) - I| &= \left| \int_0^1 s'_n(t) - \frac{\arctan(t)}{t} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 -\frac{r_n(t)}{t} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt \\ &\leq \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on en déduit  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1) = I}$ .

- 9) On a vu que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|s_n(1) - I| \leq \frac{1}{(2n+1)^2}$ . Si  $\frac{1}{(2n+1)^2} < 10^{-4}$  alors on est certains  $s_n(1)$  est une valeur approchée de  $I$  à  $10^{-4}$  près. On a :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} < 10^{-4} \iff (2n+1)^2 > 10^4 \iff 2n+1 > 10^2 \iff n \geq 50$$

Finalement,  $\boxed{s_{50}(1) \text{ approche } I \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$ .

- 10) Voici une proposition de code :

```
1 def approche_I(epsilon):
2     # epsilon > 0
3     # renvoie s_N(1) de façon à avoir
4     # une approximation de I à epsilon près
5
6     # Calcul de N
7     N=0
8     while 1/((2*N+1)**2) > epsilon :
9         N=N+1
10
11    # Calcul de s_N(1)
12    s=0
13    for k in range(N):
14        s=s+(-1)**k/((2*k+1)**2)
15
16    return(s)
```

## Exercice n° 4

Adapté du concours CCINP 2022, filière TSI

### Partie A : Préliminaires

- On calcule et on a :  $\boxed{\phi(P_0)(X) = 0}$ ,  $\boxed{\phi(P_1)(X) = 1}$  et  $\boxed{\phi(P_2)(X) = 2X + 1}$ .
- $\phi(P_3) = (X+1)^3 - X^3 = \boxed{3X^2 + 3X + 1}$ .  
 $\phi^2(P_3) = \phi(3X^2 + 3X + 1) = 3(X+1)^2 + 3(X+1) + 1 - (3X^2 + 3X + 1) = \boxed{6X + 6}$ .  
 $\phi^3(P_3) = \phi(6X + 6) = 6(X+1) + 6 - (6X + 6) = \boxed{6}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Clairement,  $P(X+1)$  est de même degré que  $P$  et donc  $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . Il reste à voir que  $\phi$  est linéaire.  
 Soit  $P, Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires. On a :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - (\lambda P(X) + \mu Q(X)) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q) \end{aligned}$$

Finalement,  $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$ .

4) Soient  $a$  et  $b$  deux complexes et  $n$  un entier naturel. On a :

$$\boxed{\text{(Binôme de Newton)} \quad : \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

5) Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  on a  $\phi(X^i) = (X+1)^i - X^i = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j$  et donc  $\phi(X^i)$  est de degré  $i-1$ .

Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et  $P = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ , un polynôme non constant de degré  $k$ , on a donc  $a_k \neq 0$ .

Par linéarité de  $\phi$ , on a  $\phi(P) = \sum_{i=0}^k a_i \phi(X^i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a_i \phi(X^i)}_{\text{degré} < k-1} + \underbrace{a_k \phi(X^k)}_{\text{degré} = k-1}$  (car  $a_k \neq 0$ ).

Finalement,  $\boxed{\phi(P) \text{ est un polynôme de degré } k-1}$ .

6) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a vu que, si  $P$  est constant alors  $\phi(P) = 0$  et que, si  $P$  n'est pas constant alors  $\phi(P)$  est de degré  $\deg(P) - 1$ . On en déduit que :

—  $\phi(P) = 0$  si, et seulement si  $\deg(P) \leq 0$  donc  $\boxed{\ker(\phi) = \mathbb{R}_0[X]}$ .

—  $\text{Im}(\phi) = \text{Vect}(\phi(X^i), i \in \llbracket 0; n \rrbracket) = \text{Vect}(\phi(X^i), i \in \llbracket 1; n \rrbracket)$ .

$(\phi(X^i), i \in \llbracket 1; n \rrbracket)$  est une famille libre car elle est échelonnée en degré donc c'est une base de  $\text{Im}(\phi)$ .

$\text{Im}(\phi)$  est donc de dimension  $n$ ; comme c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  qui est de dimension  $n$ , on en déduit que  $\boxed{\text{Im}(\phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$ .

7) Soit  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  tels que  $\phi(Q) = P$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n P(i) &= \sum_{i=0}^n (\phi(Q))(i) = \sum_{i=0}^n Q(i+1) - Q(i) = \sum_{i=0}^n Q(i+1) - \sum_{i=0}^n Q(i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} Q(i) - \sum_{i=0}^n Q(i) \quad \boxed{= Q(n+1) - Q(0)} \end{aligned}$$

## Partie B : Une famille de polynômes

8) La famille  $(H_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est échelonnée en degré et comporte  $n+1$  polynômes. Comme  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$  on en déduit que  $(H_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une famille libre et maximale,  $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$ .

9) Pour tout  $i$  entier entre 1 et  $n$  on a  $X|H_i$  et donc  $\boxed{H_i(0) = 0}$ .

10) Soit  $i$ , un entier entre 1 et  $n$ . On a :

$$\begin{aligned} \phi(H_i)(X) &= H_i(X+1) - H_i(X) \\ &= \frac{(X+1)X \dots (X-i+2)}{i!} - \frac{X(X-1) \dots (X-i+1)}{i!} \\ &= \frac{X(X-1) \dots (X-i+2)}{i!} (X+1 - (X-i+1)) \\ &= \frac{X(X-1) \dots (X-i+2)}{i!} X \\ &= \frac{X(X-1) \dots (X-(i-1)+1)}{(i-1)!} X \end{aligned}$$

Finalement, on a bien  $\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \phi(H_i) = H_{i-1}}$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \llbracket 1; i \rrbracket$  que  $\phi^k(H_i) = H_{i-k}$ . La première partie de la question donne l'initialisation. Supposons que, pour  $k \in \llbracket 1; i-1 \rrbracket$  on ait  $\phi^k(H_i) = H_{i-k}$ . Il suit que :

$$\phi^{k+1}(H_i) = \phi(\phi^k(H_i)) = \phi(H_{i-k}) = H_{i-k-1} = H_{i-(k+1)}$$

La propriété est donc héréditaire et donc vraie pour tout  $k \in \llbracket 1; i \rrbracket$ .

Pour  $k = i$  on a  $\phi^i(H_i) = H_{i-i} = H_0 \quad \boxed{= 1}$ .

**Remarque :** cette question aurait été traitée de façon plus rigoureuse en utilisant  $\prod$  que des pointillés. Vous êtes invités à le faire.

11) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$(H_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  étant une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $P$  s'écrit (de façon unique) sous la forme :  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$ .

Il reste à voir que  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  on a  $a_k = \phi^k(P)(0)$ .

On a pour  $k = 0$  :  $\phi^0(P)(0) = \text{Id}(P)(0) = P(0) = a_0$ .

Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  on a :

$$\phi^k(P) = \phi^k\left(\sum_{i=0}^n a_i H_i(X)\right) = \sum_{i=0}^n a_i \phi^k(H_i)$$

Pour  $i > k$  on a  $\phi^k(H_i) = H_{i-k}$  et  $\phi^k(H_i)(0) = H_{i-k}(0) = 0$ .

Pour  $i < k$ , comme  $\deg(H_i) = i$  et qu'appliquer  $\phi$  retire un degré, on a  $\phi^k(H_i) = 0$  et  $\phi^k(H_i)(0) = 0$ .

On a donc :  $\phi^k(P)(0) = a_k \phi^k(H_k)(0) = a_k$ .

Finalement, on a bien : 
$$P(X) = \sum_{k=0}^n \phi^k(P)(0) H_k(X).$$

12) On a :  $H_0 = 1$ ,  $H_1 = X$  et  $H_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ .

Il suit que  $X^2 = H_1 + 2H_2$

13) On a :  $\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=0}^n P(k)$  avec  $P = X^2$ .

D'après la question 7, cette somme vaut  $Q(n+1) - Q(0)$  avec  $Q$  tel que  $\phi(Q) = P$ .

Or,  $P = H_1 + 2H_2 = \phi(H_2 + 2H_3)$  d'après ce qu'on a vu à la question 10, donc on peut prendre

$Q = H_2 + 2H_3$ . On en déduit que  $\sum_{k=0}^n k^2 = (H_2 + 2H_3)(n+1) - \underbrace{(H_2 + 2H_3)(0)}_{=0, \text{ cf. Q9}}.$

On calcule  $H_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$  et on obtient : 
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14) On procède de façon analogue :  $X^3 = 6H_3 + 6H_2 + H_1$  donc  $Q = 6H_4 + 6H_3 + H_2$  vérifie  $\phi(Q) = X^3$ .

On a alors  $\sum_{k=0}^n k^3 = Q(n+1) - Q(0)$  et, après calculs, 
$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$