PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 7 12/5/2020

2 heures

- Le sujet est composé de deux parties. La première est un Vrai-Faux. La seconde comporte deux exercices.
- Le Vrai-Faux sera corrigé en auto-correction, à l'aide du corrigé qui vous sera remis.
- La seconde partie sera corrigée en double : par le professeur et par un autre élève. Pour ce faire, il est demandé de ne pas indiquer votre nom sur votre copie et de déposer un unique fichier au format pdf sur le cloud habituel. Le nom de ce fichier sera de la forme `code.pdf` où `code` est un identifiant qui vous aura été envoyé par email.
  Par exemple, si vous avez reçu l'identifiant `guitare`, le scan de votre copie devra s'appeler `guitare.pdf`.
- Un corrigé et une grille de notation seront fournis pour la seconde partie.
- La note de ce devoir ne comptera pas dans la moyenne semestrielle.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.
- Soignez la rédaction, la présentation et n'oubliez pas d'encadrer vos résultats.

Partie A : Vrai ou Faux ?

Pour chaque proposition, il faut indiquer si elle est vraie ou fausse et le prouver, c'est-à-dire proposer une démonstration ou un contre-exemple.

Chaque question est notée sur 2 points : 1 point pour la réponse et 1 point pour la preuve.

Proposition 1 : Toute partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Proposition 2 : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Proposition 3 : Deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim F + \dim G = \dim E$.

Proposition 4 : $\mathbb{K}_2[X] = \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X] / P(X) = XP'(X)\} \oplus \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X] / P(X) = P(-X)\}$.

Proposition 5 : L'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$ qui sont affines sur $[-1;0]$ et sur $[0;1]$ est un espace vectoriel de dimension 4.

Proposition 6 : Une fonction définie sur $[0;1]$ est intégrable sur $[0;1]$.

Proposition 7 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors f est nulle sur $[0;1]$.

Proposition 8 : Si f est positive sur $[0;1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors f est nulle sur $[0;1]$.

Partie B : Exercices

Exercice 1 : une famille de polynômes
Soit n un entier naturel non nul et soit $\mathcal{F} = (X^k(1-X)^{n-k})_{k\in[\![0;n]\!]}$.
$\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathbb{K}_n[X]$?

Exercice 2 : Méthode des trapèzes
Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$.
L'objectif de cet exercice est de rappeler le principe de la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ puis de majorer l'erreur commise.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Les notations qui sont introduites sont conservées dans les questions suivantes.

1. Rappeler l'expression d'une subdivision régulière $(\alpha_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ de $[a;b]$, préciser son pas h, puis la valeur $T(n)$ fournie par la méthode des trapèzes (avec n trapèzes) pour approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que $\forall x\in[a;b],\ |f''(x)|\leq M$.
3. <u>Erreur de la méthode élémentaire</u> :
   Soit $i\in[\![0;n-1]\!]$.
   a) En intégrant par parties, prouver que
   $$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = h\frac{f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})}{2} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f''(x)\,\mathrm{d}x$$
   b) Prouver que $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{12}$.
   c) En déduire une majoration de l'erreur commise par la méthode élémentaire.
4. <u>Erreur de la méthode composée</u> :
   Justifier que $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ -\ T(n)\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.