Corrigé du Devoir Surveillé 7 proposé le 12/5/2020

Partie A : Vrai ou Faux ?

Proposition 1 : Toute partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

Faux. Par exemple $\{I_3\}$ est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ (car elle n'est pas stable par combinaison linéaire : $0I_3 = 0_3 \notin \{I_3\}$).

Proposition 2 : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Vrai. Par définition, un espace vectoriel de dimension finie admet une famille génératrice finie. Or, le théorème de la base extraite indique qu'on peut extraire une base de toute famille génératrice finie. On en déduit qu'un espace de dimension finie admet une base.

Proposition 3 : Deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires si, et seulement si, $\dim F + \dim G = \dim E$.

Faux. Par exemple $E = \mathbb{K}_1[X]$, $F = G = \mathbb{K}_0[X]$.
On a $\dim E = 2$; $\dim F = 1$ et donc $\dim E = \dim F + \dim G$ mais clairement $F + G = F \neq E$ (par exemple : $X \in E$ mais $X \notin F + G$).

Proposition 4 : $\mathbb{K}_2[X] = \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X]/P(X) = XP'(X)\} \oplus \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X]/P(X) = P(-X)\}$.

Vrai. Notons $F = \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X]/P(X) = XP'(X)\}$ et que $G = \{P(X) \in \mathbb{K}_2[X]/P(X) = P(-X)\}$.
On prouve facilement que $F = \mathrm{Vect}(X)$ et $G = \mathrm{Vect}(1, X^2)$.
On en déduit que $F + G = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{K}_2[X]$.

Proposition 5 : L'ensemble des fonctions continues sur $[-1; 1]$ qui sont affines sur $[-1; 0]$ et sur $[0; 1]$ est un espace vectoriel de dimension 4.

Faux. On prouve facilement que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1; 1])$. Pour déterminer sa dimension, il faut en trouver une base.
Soit f une fonction continue sur $[-1; 1]$ qui est affine sur $[-1; 0]$ et sur $[0; 1]$. Il existe donc des réels a, b, c et d tels que : $\forall x \in [-1; 0],\ f(x) = ax + b$ et $\forall x \in [0; 1],\ f(x) = cx + d$.
On a, de plus : $\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^+} f(x) \iff b = d$.
Il suit que $f = a\left(x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ x \text{ sinon} \end{cases}\right) + b(x \mapsto 1) + c\left(x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\right)$
. On en déduit que la famille de fonctions définies sur $[1; 1]$: $\left(x \mapsto 1\ ;\ x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\ ;\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ x \text{ sinon} \end{cases}\right)$
est génératrice de l'espace ; sa dimension est donc inférieure ou égale à 3. (On peut donc s'arrêter là pour justifier la réponse, si on souhaite obtenir une base, il faut tester la liberté de la famille -qui est bien une base).

Proposition 6 : Une fonction définie sur $[0; 1]$ est intégrable sur $[0; 1]$.

Faux. Par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas intégrable sur $[0; 1]$ (pour s'en convaincre, calculer les intégrales sur $[\varepsilon; 1]$ et regarder ce qui se passe quand $\varepsilon \to 0^+$).

Proposition 7 : Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors f est nulle sur $[0; 1]$.

Faux. Par exemple $f(x) = \cos(2\pi x)$ vérifie $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais $f(0) \neq 0$.

Proposition 8 : Si f est positive sur $[0; 1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors f est nulle sur $[0; 1]$.

Faux. Par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ vérifie $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais $f(0) \neq 0$.

Partie B : Exercices

Exercice 1 : une famille de polynômes

Soit $n > 0$. $\mathcal{F}$ comporte $n+1$ polynômes, soit la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$. Notons, pour $i \in [\![0;n]\!]$, $P_i = X^i(1-X)^{n-i}$ et remarquons que $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \deg P_i = n$ donc $P_i \in \mathbb{K}_n[X]$. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il suffit de prouver que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Fixons $i \in [\![0;n]\!]$, prouvons que $\lambda_i = 0$.

On a $\lambda_i P_i = -\displaystyle\sum_{k\neq i} \lambda_k P_k$.

Par définition, $X^i | \lambda_i P_i$ donc $X^i | \displaystyle\sum_{k\neq i} \lambda_k P_k$.

Or, $\forall k > i,\ X^i | P_k$ on a donc $X^i | \displaystyle\sum_{k>i} \lambda_k P_k$ puis, en soustrayant, $X^i | \displaystyle\sum_{k<i} \lambda_k P_k$.

Or, $\displaystyle\sum_{k<i} \lambda_k P_k$ est un polynôme de degré inférieur à n qui est divisible par $(X-1)^{n-i+1}$ (puisque c'est le cas de tous les P_k pour $k < i$), il est donc nul.

De façon symétrique, en considérant que $(X-1)^{n-i} | P_i$ on aboutit à $\displaystyle\sum_{k>i} \lambda_k P_k = 0$.

On a donc $\lambda_i P_i = -\displaystyle\sum_{k\neq i} \lambda_k P_k = -\sum_{k<i} \lambda_k P_k - \sum_{k>i} \lambda_k P_k = 0$ et donc $\lambda_i = 0$.

Finalement, la famille $\mathcal{F}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2 : Méthode des trapèzes

1. Soit $n \geq 1$. On partage $[a;b]$ en n intervalles qui ont comme longueur commune $h = \frac{b-a}{n}$, les bornes de ces intervalles sont $\alpha_0 = a,\ \alpha_1 = a+h, \dots, \alpha_n = b$. Autrement dit, on a : $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \alpha_i = a + hi$.
   Sur chaque intervalle $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$ on approche f par la fonction affine qui coïncide avec f en α_i et en α_{i+1} : $x \mapsto f(a) + x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La méthode élémentaire consiste à approcher $\displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x$ par $h\frac{f(\alpha_{i+1})+f(\alpha_i)}{2}$ et la méthode composée à approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ par $T(n) = h\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i)}{2}$.
2. $f \in \mathcal{C}^2[a;b]$ donc f'' est continue sur $[a;b]$. L'image d'un segment par une fonction continue étant un segment, il existe des réels m et M tels que $f''([a;b]) = [m;M]$ et on a bien $\forall x \in [a;b],\ f''(x) \leq M$. (En général, M est noté $\|f''\|_\infty$).
3. <u>Erreur de la méthode élémentaire</u>. Soit $i \in [\![0;n-1]\!]$.
   a) On fait deux intégrations par parties successives :
   $$\begin{aligned}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f''(x)\ \mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f'(x)\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}}_{=0} - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x - \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1})) f'(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\left[(x - \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1})) f(x)\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)(f(\alpha_{i+1}) + f(\alpha_i)) + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$
   En se souvenant que $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ et isolant $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x$, on a bien :
   $$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x = h\frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f''(x)\ \mathrm{d}x$$
   b) On calcule :
   $$\begin{aligned}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2}\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}x^2 + \alpha_i\alpha_{i+1}x\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \\ &= -\frac{1}{12}\left(2\alpha_{i+1}^3 - 2\alpha_i^3 - 3(\alpha_i + \alpha_{i+1})(\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2) + 6\alpha_i\alpha_{i+1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)\right) \\ &= -\frac{1}{12}\underbrace{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}_{=h}\underbrace{\left(2(\alpha_{i+1}^2 + \alpha_{i+1}\alpha_i + \alpha_i^2) - 3(\alpha_{i+1} + \alpha_i)^2 + 6\alpha_i\alpha_{i+1}\right)}_{=-\alpha_{i+1}^2 - \alpha_i^2 + 2\alpha_i\alpha_{i+1} = -h^2}\end{aligned}$$

Finalement, l'intégrale vaut bien $\frac{h^3}{12}$.

c) L'erreur commise sur l'intervalle $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$ est $\varepsilon(i) = \left| \displaystyle\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \ - \ h\frac{f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})}{2} \right|$.

En utilisant la question 3a, il vient : $\varepsilon(i) = \left| \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f''(x)\ \mathrm{d}x \right|$.
On utilise l'inégalité de la moyenne puis la question 2 :

$$\varepsilon(i) \leq \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left| \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} f''(x) \right| \ \mathrm{d}x \leq M \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left| \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} \right| \ \mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2}$ est négative sur $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$ on a donc, sur cet intervalle, $\left| \frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} \right| = -\frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2}$. On se ramène ainsi à l'intégrale calculée à la question 3b) et on conclut :

$$\varepsilon(i) \leq M \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} -\frac{(x-\alpha_i)(x-\alpha_{i+1})}{2} \ \mathrm{d}x \leq \frac{Mh^3}{12}$$

4. Erreur de la méthode composée.
L'erreur de la méthode des trapèzes est :

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ - \ T(n) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \mathrm{d}x \ - \ h\frac{f(\alpha_i)+f(\alpha_{i+1})}{2} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(i) \quad \text{(inég. triang.)}$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Mh^3}{12} = n\frac{Mh^3}{12} = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.

Finalement, on a bien : $\left| \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ - \ T(n) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.