PCSI - Corrigé du DS7, proposé le 3/6/2023

Vrai ou Faux

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

Vrai. E est de dimension 3, soit $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base de E, on note $\vec{d} = \vec{0}$ et on a bien $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

Remarque : si on réfléchit du point de vue des dimensions $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $\text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$ ne peuvent pas être tous les deux des plans. Si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ admet $\mathcal{F}$ pour famille génératrice, donc sa dimension est au plus n, mais pas forcément n. Cela dépend de la liberté ou non de la famille $\mathcal{F}$.

2. Si M et N sont deux matrices carrées de taille n qui sont inversibles, alors elles sont semblables.

Faux. $M = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $GL_2(\mathbb{R})$ mais elles ne sont pas semblables.
En effet, deux matrices sont semblables lorsqu'elles représentent le même endomorphisme relativement à deux bases différentes or, M est la matrice de $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ relativement à nimporte quelle base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : on peut aussi répondre du point de vue matrices : M et N sont semblables si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $N = P^{-1}MP$ or, $P^{-1}MP = P^{-1}P = I_2 = M$ et $N \neq M$.

3. Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $f \circ f = 0$. Alors, rg $f = 1$.

Vrai. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, on a donc $\text{rg}(f) \leq \dim(\mathbb{R}_2[X]) \iff \text{rg}(f) \leq 3$.
$f \neq 0$ donc $\text{rg}(f) > 0$ et $\text{rg}(f) \in \{1, 2, 3\}$.
Si on avait $\text{rg}(f) = 3$ alors f serait un isomorphisme et $f \circ f$ en serait également un, ce qui n'est pas le cas puisque $f \circ f = 0$.
Si on avait $\text{rg}(f) = 2$, il existerait deux polynômes P et Q tels que $\text{Vect}(f(P), f(Q)) = \text{Im}(f)$.
Or, $f \circ f = 0$ donc $f(P)$ et $f(Q)$ sont dans $\text{Ker}(f)$. D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, cela implique que $f(P)$ et $f(Q)$ sont colinéaires, c'est absurde car ils génèrerent un plan vectoriel.
Finalement, la seule possibilité est $\text{rg}(f) = 1$.

Remarque : une question demeure en suspens, un tel endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ existe-t-il ?
La réponse est oui, construisons-en un.
Pour construire une application linéaire, il faut et il suffit de choisir les images d'une base. Utilisons la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2)$. On souhaite que le rang de f soit 1, c'est-à-dire que la famille $(f(1), f(X), f(X^2))$ soit de rang 1. On souhaite également que $f^2 = 0$ c'est-à-dire que $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ soient dans $\text{Ker}(f)$, on a donc intérêt à connaître le plan $\text{Ker}(f)$.
Si on pose $f(1) = 0$, $f(X) = 0$ on a $\text{Vect}(1, X) \subset \text{Ker}(f)$; si on pose $f(X^2) = 1$ on a bien $f(X^2) \in \text{Ker}(f)$ et on a construit une application qui répond aux prescriptions.

4. Un élève répond au hasard aux cinq questions d'un questionnaire de type Vrai ou Faux. La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale à $\dfrac{10}{32}$.

Vrai. Soit X le nombre de bonnes réponses. Chaque réponse est bonne avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et il n'y a pas de dépendance entre les réponses aux différentes questions. X est donc le nombre de succès dans la répétition indépendante de 5 expériences de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, il suit que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$.
On a alors, $\mathbb{P}(X = 3) = \dbinom{5}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-3} = \dfrac{10}{32}$

5. On poursuit la question précédente. Dans le Vrai ou Faux, chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse est pénalisée de 0,5 points. La note moyenne à laquelle l'élève peut prétendre est 2 sur 5.

Faux. On garde les notations précédentes. Le candidat a X bonnes réponses et $5-X$ mauvaises réponses, sa note est donc $Y = X - \frac{1}{2}(5-X) = \frac{3}{2}X - \frac{5}{2}$.
La note à laquelle l'élève peut s'attendre est $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\frac{3}{2}X - \frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\mathbb{E}(X) - \frac{5}{2}$. Or, $\mathbb{E}(X) = np = \frac{5}{2}$ donc $\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{4}$.

6. Une suite qui n'est pas monotone diverge.

Faux. $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone mais elle converge vers 0.

7. Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

Faux. $(n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (car $\forall n \in \mathbb{N},\ n+(-1)^n \geq n-1$) mais n'est pas croisssante à partir d'un certain rang. En effet, si on note $u_n = n+(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1+(-1)^{n+1}) - (n+(-1)^n) = 1 - 2(-1)^n$$

Cette quantité est négative lorsque n est pair et donc, on a $u_{2n+1} < u_{2n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

8. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_{2n}$ converge aussi.

Faux. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais $\sum \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \sum \frac{1}{2n}$ diverge. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

et on retrouve les sommes partielles de la série harmonique qui diverge vers $+\infty$.

9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ converge aussi.

Vrai. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$ on a alors $\dfrac{u_n}{n^2}$ qui est du signe de ℓ à partir d'un certain rang. De plus, $\dfrac{u_n}{n^2} \sim \dfrac{\ell}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc, $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ converge.
Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on n'a pas nécessairement un signe constant à partir d'un certain rang (et on n'a pas d'équivalent à 0). On a : $\left|\frac{u_n}{n^2}\right| = o(\frac{1}{n^2})$ donc $\sum \dfrac{u_n}{n^2}$ est absolument convergente ce qui implique que cette série converge.

10. Si $\sum u_n$ converge alors $\sum |u_n|$ converge aussi.

Faux. La série harmonique alternée fournit un contre-exemple.

Exercice de probabilités

1. Le dé étant équilibré, les résultats sont équiprobables : X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$: $\forall i \in [\![1;4]\!],\ \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{4}$. $\boxed{\text{La fonction de répartition } F_1 \text{ de } X_1 \text{ est donc } F_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{4} \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} \text{ si } 3 \leq x < 4 \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}}$.
2. Les lancés sont opérés avec le même dé et sont indépendants, on en déduit que $\boxed{\text{les lois et fonctions de répartition de } X_2 \text{ et } X_3 \text{ sont donc les mêmes que celle de } X_1}$.

3. $F(x) = \mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq x)$. Or, X_1, X_2 et X_3 prennent leurs valeurs dans $[\![1;4]\!]$, il suit que $\boxed{\text{pour } x < 1 \text{ on a } F(x) = 0 \text{ et pour } x > 4 \text{ on a } F(x) = 1}$.

4. Soit $x \in [1;4]$. On a : $\boxed{(M \leq x) = (\max(X_1, X_2, X_3) \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)}$.

5. On a donc, pour $x \in [1;4]$:

$$F(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq x) = \mathbb{P}\left((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)\right)$$

Les lancés sont indépendants les uns des autres donc X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et on a :

$$F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) \times \mathbb{P}(X_3 \leq x) = F_1(x)^3$$

Il suit que : $F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{64} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{27}{64} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$.

On en déduit $\boxed{\text{la loi de } M : \begin{array}{c|cccc} m_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \mathbb{P}(M = m_i) & \frac{1}{64} & \frac{7}{64} & \frac{19}{64} & \frac{37}{64} \end{array}}$.

6. L'espérance de M vaut $E(M) = \sum_i m_i \mathbb{P}(M = m_i) = \frac{1}{64} + \frac{14}{64} + \frac{57}{64} + \frac{148}{64} = \frac{220}{64}$ $\boxed{= \frac{55}{16}}$.

Problème d'algèbre

I - Etude de deux applications

1. Tout d'abord, si P est un polynôme, il est clair que $P(\frac{X}{2})$ et $P(\frac{X+1}{2})$ sont des polynômes du même degré que P. Il suit que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
On vérifie aisément que f est linéaire : soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, soit λ et μ deux réels :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{f \text{ est bien un endomporphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2. Les colonnes de A sont les colonnes représentant $f(1), f(X)$ et $f(X^2)$ dans la base canonique. On calcule : $f(1) = 1$, $f(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$ et $f(X^2) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{8}$. Il suit que $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

3. A est échelonnée, son rang est 3, on en déduit que :
$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et donc que } f \text{ injective et surjective}}$.

4. $\boxed{\text{La linéarité de } \phi \text{ est évidente, l'espace d'arrivée est } \mathbb{R}}$.

5. $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$: il y a deux possibilités $\{0\}$ et $\mathbb{R}$. Comme ϕ n'est pas l'application nulle ($\phi(X) = 1 \neq 0$) alors $\boxed{\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}}$.
On utilise le Théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\phi))$ donne $3 = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + 1$ soit $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = 2}$.

6. $\boxed{\phi \text{ n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à } \{0\}, \phi \text{ est surjective}}$.

7. On sait que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$; pour en donner une base il suffit d'en trouver une famille libre de deux vecteurs.
$X-1$ et X^2-1 sont dans $\mathrm{Ker}(\phi)$, ils forment une famille échelonnée et donc libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
On en déduit que $\boxed{(X-1, X^2-1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(\phi)}$.

II - Puissances d'une matrice

1. $\mathcal{B} = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$ est une famille échelonnée et donc libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $\mathcal{B}$ comporte 3 vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.
2. On calcule : $f(1) = 1$, $f(-2X+1) = \frac{1}{2}(-X+1-X) = \frac{1}{2}(-2X+1)$ et
$f(6X^2-6X+1) = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}X^2 - 3X + 1 + 6(\frac{X+1}{2})^2 - 3(X+1)+1] = \frac{1}{2}(3X^2-3X+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(6X^2-6X+1)$.
On en déduit que $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.
3. La matrice de passage Q de la base canonique à $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base canonique. On en déduit $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$.
4. Il a plusieurs façons de justifier l'inversibilité de Q :
— point de vue « endomorphisme » : Q est la matrice de l'identité de $\mathbb{R}_2[X]$, relativement à $\mathcal{B}$ et à la base canonique. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ étant un isomorphisme, sa matrice est inversible.
— point de vue « calcul matriciel » : Q est échelonnée et son rang est 3, elle esr donc inversible.
— point de vue « restitution du cours » : une matrice de passage est inversible, donc Q est inversible.

Par contre, pour calculer Q^{-1}, il faut échelonner puis réduire $(Q|I_3)$ à l'aide de l'algorithme de Gauss.
Après calculs, on obtient : $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}}$.
5. On a : $B = Q^{-1}AQ \iff \boxed{QBQ^{-1} = A}$.
6. Pout$n \geq 1$ on a $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$, et donc $A^n = (QBQ^{-1})^n = QB^nQ^{-1}$.
Après calculs, $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n}) & \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2^n}) \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}}$.
7. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $n = 0$, $f^n(P) = \mathrm{Id}(P) = P$.
Pour $n \geq 1$, $f^n(P)$ a pour matrice colonne dans la base canonique $A \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \frac{b}{2}(1-\frac{1}{2^n}) + \frac{a}{3}(1+\frac{1}{2^n}) \\ \frac{b}{2^n} \\ \frac{a}{2_n} \end{pmatrix}$
et donc $\boxed{f^n(P) = \frac{a}{2^n}X^2 + \frac{b}{2^n}X + c + \frac{b}{2}(1-\frac{1}{2^n}) + \frac{a}{3}(1+\frac{1}{2^n})}$.
8. Pour $n \geq 1$, et $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ on a :

$$\phi(f^n(P)) = f^n(P)(1) = \frac{a}{2^n} + \frac{b}{2^n} + c + \frac{b}{2}(1-\frac{1}{2^n}) + \frac{a}{3}(1+\frac{1}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$$

On calcule : $\displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 ax^2 + bx + c\ \mathrm{t}x = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c.$

Finalement, on a bien $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \lim_{n\to+\infty} \phi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t}$.

Problème d'analyse : étude de $\sum \frac{1}{n^2}$.

1. a) Soit deux réels a et b, on a :

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b - (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2\cos a \sin b$$

En divisant par 2 on a bien $\boxed{\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))}$.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) \boxed{= -2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos 0 \boxed{= n}$.

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$. On a : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\right) = \mathrm{Re}(S_n(x))$.
$S_n(x)$ est une somme géométrique dont la raison e^{i2x} est différente de 1 (car $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$).
Il suit que $S_n(x) = e^{i2x}\frac{1-e^{i2nx}}{1-e^{i2x}} = e^{i2x}\frac{e^{inx}}{e^{ix}}\frac{\sin nx}{\sin x}$ en appliquant la formule vue en b). On a alors :

$$f_n(x) = \mathrm{Re}(S_n(x)) = \mathrm{Re}(e^{i(n+1)x})\frac{\sin nx}{\sin x} = \cos((n+1)x) \times \frac{\sin nx}{\sin x} \boxed{= \frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x}}.$$

en appliquant la formule vue en a) avec $a = (n+1)x$ et $b = nx$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, fixé. Soit la fonction g définie que $]0; \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = \frac{ax+bx^2}{\sin x}$.

a) Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x > 0$ et g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme quotient bien défini de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Pour $x \to 0$ on a $ax + bx^2 \sim ax$ et $\sin x \sim x$ on a donc par quotient $g(x) \underset{0}{\sim} a$.

On en déduit que $\boxed{g \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant } g(0) = a}$.
Dorénavant, on considère que g est définie et continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

b) On a déjà justifié que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. On fait un développement limité au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{0}{=} \frac{x(a+bx)}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} \underset{0}{=} (a+bx)(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)) \underset{0}{=} a + bx + \frac{ax^2}{6} + o(x^2)$$

On en déduit que $\boxed{g \text{ est dérivable en 0 et } g'(0) = b}$ (on revoit également que g est continue en 0 si, et seulement si, $g(0) = a$).

c) On sait déjà que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, les formules de dérivation usuelles donnent :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}],\ g'(x) = \frac{(2bx+a)\sin x - (ax+bx^2)\cos x}{\sin^2 x}$$

On a vu à la question précédente que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = b$.
Il reste à vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = b$. On se sert d'un développement limité en 0 :

$$g'(x) \underset{0}{=} \frac{(2bx+a)(x+o(x)) - (ax+bx^2)(1+o(x))}{(x+o(x))^2} \underset{0}{=} \frac{bx^2+o(x)}{x^2+o(x^2)} \underset{0}{\sim} b$$

Finalement, $\boxed{g' \text{ est continue en 0 et donc sur } [0; \frac{\pi}{2}], \text{ c'est-à-dire que } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}]}$.

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, $G_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin nx \,\mathrm{d}x$.

a) On a vu que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et donc, comme $x \mapsto \sin nx$ l'est aussi, $x \mapsto g(x)\sin nx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Finalement, $\boxed{G_n \text{ est bien défini comme intégrale d'une fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{2}]}$.

b) On procède par parties en posant $\begin{cases} u(x) = g(x) \\ v'(x) = \sin nx \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = g'(x) \\ v(x) = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, il suit que :

$$G_n = \left[-\frac{1}{n}g(x)\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{a - g(\frac{\pi}{2})\cos(n\frac{\pi}{2})}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x$$

On a $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(x)\cos nx| \,\mathrm{d}x \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(x)| \,\mathrm{d}x$ (cette intégrale étant bien définie car g est $\mathcal{C}^1$ donc g' est continue).

Il suit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = 0$ puis que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n = 0}$.

II. Nature et somme de $\sum \frac{1}{n^2}$

1. $\boxed{\sum \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente}}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) On procède par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2kx \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2kx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2}\left[\cos 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{= \frac{(-1)^k - 1}{4k^2}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2kx \,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[x^2\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin 2kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2kx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2k^2}\left[x\cos 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k\pi}{4k^2} - \frac{1}{4k^3}\underbrace{\left[\sin 2kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\ &= \boxed{\frac{(-1)^k\pi}{4k^2}}\end{aligned}$$

   b) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \,\mathrm{d}x \;=\; a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2kx \,\mathrm{d}x + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2kx \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k(a+b\pi) - a}{4k^2}$$

   et alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4k^2} \iff (-1)^k(a+b\pi)-a = 1.$ $\boxed{\text{Le couple } (a,b) = (-1, \tfrac{1}{\pi}) \text{ convient}}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédente puis la linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\cos 2kx \,\mathrm{d}x\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\sum_{k=1}^n \cos 2kx \,\mathrm{d}x \boxed{= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)f_n(x) \,\mathrm{d}x}.$$

4. On utilise la question précédente ainsi que l'expression de $f_n(x)$ établie à la question 1.c) de la partie I :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)f_n(x) \,\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\frac{\sin(2n+1)x - \sin x}{2\sin x} \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2)\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x \boxed{= 2G_{2n+1} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

   Remarque : l'existence des intégrales est assurée par les résultats de la partie I.

5. On a vu que $G_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $G_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après la question précédente, on déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x.$$

   On calcule : $\displaystyle -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x = -2\left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a\pi^2}{4} - \frac{b\pi^3}{12}$ puis on remplace (a,b) par $(-1, \frac{1}{\pi})$ qui est la valeur trouvée à la question 2 et on a : $\displaystyle -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+bx^2) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.