PCSI | Mathématiques - Devoir Surveillé 8 | 26/5/2020

1 heure

- Le sujet est composé d'un Vrai-Faux et d'un exercice.
- Le Vrai-Faux sera corrigé en auto-correction, à l'aide du corrigé qui vous sera remis.
- L'exercice sera corrigé en double : par le professeur et par un autre élève. Pour ce faire, il est demandé de ne pas indiquer votre nom sur votre copie et de déposer un unique fichier au format pdf sur le cloud habituel. Le nom de ce fichier sera de la forme `code.pdf` où `code` est un identifiant qui vous aura été envoyé par email.
  Par exemple, si vous avez reçu l'identifiant `guitare`, le scan de votre copie devra s'appeler `guitare.pdf`.
- Un corrigé et une grille de notation seront fournis pour l'exercice.
- La note de ce devoir ne comptera pas dans la moyenne semestrielle.
- Exceptionnellement, puisqu'elles ne servent pas, les calculatrices sont autorisées pour ce devoir.
- Soignez la rédaction, la présentation et n'oubliez pas d'encadrer vos résultats.

Vrai ou Faux ?

Pour chaque proposition, il faut indiquer si elle est vraie ou fausse et le prouver, c'est-à-dire proposer une démonstration ou un contre-exemple.

Chaque question est notée sur 2 points : 1 point pour la réponse et 1 point pour la preuve.

Proposition 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3.
Il est possible de trouver des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ tels que $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}) \oplus \text{Vect}(\vec{c}, \vec{d})$.

Proposition 2 : $(X^2 + X - 1, X^2 + 3X + 2, X^2 + 7)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 3 : $\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes.

Proposition 4 : La composée de deux projeteurs est un projecteur.

Proposition 5 : Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ qui vérifie $f \circ f = 0$. Alors, $\text{rg } f = 1$.

Exercice : un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs $\vec{a}(7; 3; 1)$, $\vec{b}(-1; 1; 2)$ et $\vec{c}(2; 4; 5)$ et le sous-espace $E = \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\phi(x; y; z) = (0; 0; x - 3y + 2z)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Prouver que $E \subset \text{Ker } \phi$; en déduire que $E = \text{Ker } \phi$.
3. Déterminer $\text{Im } \phi$.
4. Prouver que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } \phi \oplus \text{Im } \phi$: $(\star)$.
5. ϕ est-elle la projection sur $\text{Im } \phi$ parallèlement à $\text{Ker } \phi$?
6. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $(\star)$, puis les images des vecteurs de cette base par ϕ. En déduire une description de ϕ sur $\text{Ker } \phi$ et sur $\text{Im } \phi$.