4 heures

- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à encadrer les résultats. Il est également conseillé de prendre quelques minutes pour se relire et corriger les fautes d'orthographe.
- Les calculatrices sont interdites pour ce devoir.

Questions de cours :

a) Enoncer le théorème des accroissements finis.

b) Enoncer le théorème du rang.

Exercice n° 1

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est positive et strictement décroissante.
2. Prouver que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Donner la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{n}$.
4. Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
5. Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{n!}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

6. Soit $x \geq 0$. Déterminer la nature de $\sum x^n u_n$ en fonction de x.

Exercice n° 2

Dans cet exercice, x, y et z désignent des nombres complexes.

1. Développer $(X - x)(X - y)(X - z)$.
2. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{array}\right.$.

Exercice n° 3

On étudie la fonction F définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x.
2. Justifier la continuité de la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Etudier les variations de F.
4. Ecrire le développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de $x = 1$.
5. Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) = F(\frac{1}{x})$.
6. Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Phi(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$.
   a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
   b) Prouver que $\forall x > 0,\ F(x) = \mathrm{Arctan}(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \Phi(t) \, \mathrm{d}t$.

Problème

Questions préliminaires et notations

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 3. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$, on désigne par $\mathcal{C}_n$ la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \\ \quad P \mapsto \dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P \end{cases}$$

1. Soit P un polynôme unitaire de degré $k \geq 3$. Quel est le degré et le coefficient dominant de $f(P)$?
   Ce coefficient dominant qui ne dépend que de k est noté λ_k. Cette notation est valable dans tout le problème.

2. Justifier que l'on peut définir un endomorphisme f_n de $\mathbb{C}_n[X]$ par : $f_n : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X] \\ \quad P \mapsto f(P) \end{cases}$

Partie A : cas $n = 3$

1. Former la matrice (notée M_3) de f_3 dans $\mathcal{C}_3$.
2. Calculer M_3^2, en déduire que f_3 est un projecteur.
3. Déterminer $\mathrm{rg}(f_3)$ puis des bases de $\ker(f_3)$ et de $\mathrm{Im}(f_3)$.
4. Justifier que $\ker(f_3)$ et $\mathrm{Im}(f_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}_3[X]$.
5. Donner une base adaptée à $\ker(f_3) \oplus \mathrm{Im}(f_3)$ puis la matrice de f_3 dans cette base.

Partie B : cas $n \geq 4$

1. Montrer que :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \frac{1}{2}(k-1)(k-2) \neq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$
2. On note $g_n = f_n - \lambda_n \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_n[X]}$. Montrer que $\mathrm{rg}(g_n) = n$.

Définitions :
On appelle **valeur propre** de f, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lequel il existe un polynôme <u>non nul</u> P tel que $f(P) = \lambda P$.
On dit alors que P est un **polynôme propre** associé à la valeur propre λ.
On définit aussi **l'espace propre** (noté E_λ) associé à la valeur propre λ : $E_\lambda = \{P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } f(P) = \lambda P\}$.

3. Soit λ, une valeur propre de f. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
4. Montrer que, pour toute valeur propre λ de f, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \lambda_k$.
5. Montrer que, pour $n \geq 4$, λ_n est une valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 1.
6. Que se passe-t-il pour le λ_k avec k entre 0 et 3 ?
7. Pour $n \geq 4$, montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle la matrice de f_n est diagonale. Préciser cette matrice.