PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 9 16/6/2020

2 heures

- Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix, mais ils doivent apparaître d'un seul tenant sur vos copies.
- La calculatrice est autorisée (mais elle ne sert pas dans ce devoir).
- Soignez la rédaction, la présentation, n'oubliez pas d'encadrer vos résultats.

Bon courage.

Exercice n° 1

On dispose d'une pièce qui donne Pile avec une probabilité $p \in]0;1[$.
On la lance n fois et on appelle X le numéro du lancé qui donne le premier Pile ; on convient que $X = 0$ si l'on n'obtient jamais de Pile.
Quelle est la loi de X ?

Exercice n° 2

n candidats passent un examen. La probabilité de réussir pour chaque candidat est $p \in]0;1[$. En cas d'échec, le candidat passe la session de rattrapage avec la même probabilité p de réussite.
Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux sessions ?

Exercice n° 3

Soit E un espace de dimension 2, f un endomorphisme non nul de E qui vérifie $f \circ f = 0$.
Prouver qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de F_n en fonction de n.
2. Justifier la convergence de $\sum \dfrac{F_n}{2^n}$.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n}$.

Exercice n° 5

On travaille dans $\mathbb{R}^3$, on représente les vecteurs en colonnes. On note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s la symétrie par rapport à $\operatorname{Vect}(w)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(u, v)$.
   Donner la matrice de s relativement à $\mathcal{B}$.
3. Donner la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la matrice s relativement à la base canonique, on note A cette dernière matrice.
5. Que vaut A^{2020} ?

Exercice n° 6

Soit Y une variable aléatoire réelle qui ne prend pour valeurs un nombre fini d'entiers naturels.

On appelle **fonction génératrice** de Y, et on note g_Y, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(Y = k)$.

1. Justifier que g_Y est bien définie et que c'est une fonction polynômiale.
2. Exprimer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction des dérivées premières et secondes de g_Y.
3. Considérons à présent que Y suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   a) Donner une expression de la fonction génératrice de Y (sans $\sum$).
   b) A l'aide de la question 2, déterminer l'espérance puis la variance de Y.
4. Soit Z, une autre variable aléatoire qui prend pour valeurs un nombre fini d'entiers naturels et qui est indépendante de Y. Montrer que $g_{Y+Z} = g_Y g_Z$.
5. Soit $p \in]0;1[$. Soit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$ (avec n et m deux entiers naturels non nuls). Quelle est la loi de $Y + Z$?