PCSI, Interrogation de cours 15, 18 juin 2021

Codez votre numéro d'étudiant ci contre chiffre par chiffre, puis complétez l'encadré.

☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9

NOM, Prénom :

Durée : 15 minutes.
Aucun document n'est autorisé. Pas de calculatrice.
Dans une question à choix simple, choisir la bonne réponse rapporte un point, choisir une mauvaise réponse pénalise d'un demi-point. Si vous ne proposez pas de réponse, il n'y a pas de pénalité.
Les questions avec un ♣ admettent une ou plusieurs réponses correctes. Il y a alors 1 point par bonne réponse et une pénalité de 0,5 points par mauvaise réponse cochée.

Question 1 ♣ Parmi les ensembles ci-dessous, quels sont ceux qui sont des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels?

- ☐ $\mathbb{Z}$
- ☐ $\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P - P' = 0\}$
- ☐ L'ensemble des fonctions en escalier définies sur$[0;1]$
- ☐ $\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P = 5\}$
- ☐ $\mathbb{R}$

Question 2 ♣ Parmi les applications ci-dessous, lesquelles sont linéaires?

- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x;y) \mapsto \sin(x+y)\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x;y) \mapsto 5x+2y\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x;y) \mapsto y\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x;y) \mapsto xy\end{array}\right.$
- ☐ $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ (x;y) \mapsto x+1\end{array}\right.$

Question 3 ♣ Quelles propositions sont vraies?

- ☐ Une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ ne peut pas être surjective.
- ☐ Un endomorphisme peut être sujectif sans être injectif mais seulement en dimension infinie.
- ☐ On peut trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit injectif sans être surjectif.
- ☐ Une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ ne peut pas être injective.

Question 4 ♣ Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- ☐ $\dim F = 3$.
- ☐ f est injective.
- ☐ f est surjective.
- ☐ On peut trouver une base $\widehat{\mathcal{B}_E}$ telle que la matrice de f relativement à $\widehat{\mathcal{B}_E}$ et $\mathcal{B}_F$ ait une première colonne de zéros.
- ☐ Aucun vecteur de $\mathcal{B}_E$ n'est dans le noyau de f.

Question 5 ♣ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- ☐ $f(X^2 + X + 1) = 6(X^2 + X + 1)$
- ☐ f est projecteur.
- ☐ f est une symétrie.
- ☐ f est un isomorphisme.
- ☐ On peut trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.