Intégrale de Riemann

Notations : $[a;b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$; $f : [a;b] \to \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Construction de l'Intégrale de Riemann

Définition

- Une **subdivision** de $[a;b]$ est $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
  Si les intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ ont une longueur constante, la subdivision est **régulière**, son **pas** est $h = \frac{b-a}{n}$.

- Une **fonction en escalier** sur $[a;b]$ est une fonction « constante par morceaux » , c'est-à-dire pour laquelle il existe une subdivision telle que la fonction soit constante sur chaque $]x_i;x_{i+1}[$.

- On note $\mathrm{Esc}([a;b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$.

Proposition

$\mathrm{Esc}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$.

Théorème

Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b]),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in \mathrm{Esc}([a;b])\ /\ \forall x \in [a;b], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

Définition

Soit $g \in \mathrm{Esc}([a;b])$, notons c_i la valeur de g sur $]x_i;x_{i+1}[$.

On définit l'intégrale de g : $\displaystyle\int_{[a;b]} g = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$.

Proposition

L'intégrale <u>des fonctions en escalier</u> a les propriétés suivantes : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Définition
On note : $E_f^+ = \{g \in \mathrm{Esc}([a;b])/g \geq f\}$ et $E_f^- = \{g \in \mathrm{Esc}([a;b])/g \leq f\}$.

Théorème
Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$ alors : $\inf \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^+ \right\} = \sup \left\{ \int_{[a;b]} g \ / \ g \in E_f^- \right\}$.

Cette quantité commune est prise comme définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Les fonctions continues sont donc intégrables.

Proposition
Les propriétés de l'intégrale s'étendent des fonctions en escalier aux fonctions continues : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Définition
Soit f intégrable. La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Sommes de Riemann

Définition
L'intégrale de la fonction en escalier qui vaut $f(x_i)$ sur $[x_i; x_{i+1}[$, avec (x_i) la subdivision régulière à $n+1$ points (et donc n intervalles) s'appelle **somme de Riemann**, on la note $S_n(f)$. $S_n(f) = \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$.

Théorème
Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b]$ alors $S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a;b]} f$.

Remarque : On peut s'en servir pour calculer une valeur approchée de $\int_{[a;b]} f$, c'est alors la méthode des rectangles à gauche.

3 Lien entre intégrale et primitives

Théorème
Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b]$ alors $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire
- Les fonctions continues admettent des primitives.
- Si on connait une primitive F, on sait calculer $\int_{[a;b]} f$.

4 Techniques de calcul d'intégrales

Méthode
Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\ \ \mathrm{d}x$:

1. si on dispose d'une primitive F de f alors le calcul de l'intégrale devient une soustraction !

$$\int_a^b f(x)\ \ \mathrm{d}x =$$

2. Sinon, on peut envisager une intégration par parties en voyant $f(x)$ comme le produit $u'(x)v(x)$ et en utilisant la formule :

$$\int_a^b f(x)\ \ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\ \ \mathrm{d}x =$$

3. Sinon, on peut essayer un changement de variable en introduisant une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective :

$$\int_a^b f(x)\ \ \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \ \mathrm{d}t$$

5 Formules de Taylor

Théorème
Formule de Taylor avec reste intégral : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors :

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\;\mathrm{d}t.$$

Deux conséquences :

Théorème
Formule de Taylor-Young : si $f \in \mathcal{C}^{n}(I)$ alors, pour tout $a \in I$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; o((x-a)^n)$$

Théorème
Inégalité de Taylor Lagrange : si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors :

$$\left| f(b) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$$