Systèmes Différentiels Linéaires

1 Notations générales

I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Une application $t \in I \mapsto M(t)$ où $M(t) = (m_{i,j}(t)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ($k \in \mathbb{N}$) si et seulement si chaque application $t \mapsto m_{i,j}(t)$ l'est.
$M^{(k)}(t)$ est alors la matrice de terme général $m_{i,j}^{(k)}(t)$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Dans tout le chapitre, les fonctions A et B sont supposées continues sur I.

On cherche à résoudre le **système différentiel linéaire**

$$(E) : X' = A(t)X + B(t)$$

où X est une fonction inconnue dérivable de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Une solution de (E) est une fonction dérivable de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Ce système peut s'expliciter sous la forme : $\begin{cases} x_1' &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}(t)x_j + b_1(t) \\ \vdots & \\ x_n' &= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}(t)x_j + b_n(t) \end{cases}$

Si $n = 1$, on retrouve une équation de la forme : $x' = a(t)x + b(t)$, où a, b et x sont des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On peut parler alors d'équation différentielle **scalaire**.

On appelle **système homogène** associé à (E) le système différentiel : $(H) : X' = A(t)X$.

On notera $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de (H) sur I.

2 Résolution théorique

Définition

On appelle **problème de Cauchy** la recherche des solutions d'un système différentiel linéaire (E) vérifiant

On admet le théorème fondamental suivant :

Théorème 1 : Théorème de Cauchy-Lipschitz

> le problème de Cauchy
>
> $$\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= \quad X_0 \end{cases}$$
>
> admet

3 Cas d'un système homogène

Soit le système différentiel linéaire homogène $(H) : X' = A(t)X$, où A est continue sur I.
La fonction nulle est solution de (H).
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit qu'une solution différente de la fonction nulle ne s'annule en aucun point de I.

Théorème 2 : Structure de $S_I(H)$

> 1. $S_I(H)$ est un s.e.v de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension .
> 2. Soit $t_0 \in I$. L'application qui à une solution X associe $X(t_0)$ est un isomorphisme de $S_I(H)$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

4 Cas d'un système quelconque

Théorème 3 : Structure de $S_I(E)$

> Si X_p est une solution de E, alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions de la forme : où Y est une solution quelconque de (H).

Méthode : La résolution de (E) se déroule donc généralement en deux temps : résolution de (H) et recherche d'une solution "particulière".

On peut parfois simplifier la recherche d'une solution particulière en appliquant le **principe de superposition** : Si $B = \alpha B_1 + \beta B_2$, on cherche une solution $X_{p,1}$ de l'équation différentielle $X' = AX + B_1$ et une solution $X_{p,2}$ de $X' = AX + B_2$.
La fonction : est alors une solution de (E).

Cas d'un système à coefficients réels :
Supposons $A(t)$ et $B(t)$ à coefficients réels.
Si X une solution de (H) à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{Re}(X)$ et $\mathrm{Im}(X)$ sont des solutions de (H) à valeurs réelles.
Si X une solution de (E) à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{Re}(X)$ est une solution de (E) à valeurs réelles.

5 Equations scalaires d'ordre 1

On considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 et normalisée, i.e. de la forme

$$(E) : x' = a(t)x + b(t),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On peut alors appliquer les résultats précédents avec $n = 1$ et on retrouve les résultats connus :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le problème de Cauchy associé à l'équation (E) et à la condition initiale $x(t_0) = x_0$ (avec t_0 donné dans I) admet une unique solution.

Structure de $S_I(H)$

L'ensemble des solutions de l'équation $(H) : x' = a(t)x$ est un e.v. de dimension 1, engendré par la fonction $\varphi : t \in I \mapsto e^{A(t)}$, où A est une primitive de a.

6 Equations scalaires d'ordre 2

On considère une équation linéaire scalaire d'ordre 2 normalisée

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où les fonctions a, b, c sont continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
On note (H) l'équation homogène associée : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.
On peut écrire (E) sous forme matricielle en introduisant la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.
y est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si X est de classe $\mathcal{C}^1$ et alors $X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$.
On obtient ainsi :

$$(E) \Leftrightarrow X' = A(t)X + B(t), \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

On peut alors appliquer les propriétés des systèmes différentiels pour retrouver les résultats connus :

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $t_0 \in I$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$. Les fonctions a, b, c étant continues sur I, le problème de Cauchy associé à (E) et à la condition initiale $y(t_0) = u_0, y'(t_0) = v_0$ admet une unique solution sur I.

Structure de $S_I(H)$

L'ensemble des solutions de (H) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.

Il n'y a pas de méthode générale de résolution dans le cas où les coefficients a et b ne sont pas constants.

- Si on connaît deux solutions de (H) non colinéaires, on en déduit $S_I(H)$.
- On peut chercher une solution particulière "évidente" ou d'une forme simple : fonctions polynômes, $t \mapsto t^\alpha$ ou $t \mapsto e^{\alpha t}$ ... ou une solution développable en série entière (des exemples seront traités plus tard).
- Si on connaît une solution φ de (H) ou de (E) qui ne s'annule pas sur I, on peut appliquer la **méthode de variation d'une constante** (dite aussi **méthode de Lagrange**) pour trouver toutes les solutions de (H) ou de (E) : on pose $y = z\varphi$, et on se ramène ainsi à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 pour z'.

- On peut effectuer un changement de variable et/ou de fonction inconnue pour se ramener à une forme plus simple. L'énoncé comportera en général une indication.

7 Système différentiel à coefficients constants

On considère le système différentiel

$$(E) : X' = AX$$

où A est une matrice carrée <u>constante</u>.

Si A est diagonale, le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & a_{1,1}x_1 \\ \vdots & & \\ x_n' & = & a_{n,n}x_n \end{array}\right.$.

Sa résolution se ramène donc à celle de n équations scalaires d'ordre 1.

Si A est triangulaire supérieure, on obtient : $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1' & = a_{1,1}x_1 + & \cdots & + & a_{1,n}x_n \\ \vdots & & & & \\ x_{n-1}' & = & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n \\ x_n' & = & & & a_{n,n}x_n \end{array}\right.$.

On peut alors résoudre la dernière équation pour trouver x_n, puis on remplace dans l'avant-dernière pour calculer x_{n-1} et on remonte les calculs pour trouver successivement $x_{n-2}, \cdots, x_1$.

Dans tous les cas, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T (éventuellement diagonale) telle que : $A = PTP^{-1}$.

On a alors : $(E) \Leftrightarrow P^{-1}X' =$. On pose : $Y = P^{-1}X$. P^{-1} est à coefficients constants, donc X est dérivable si et seulement si Y l'est aussi et l'équation (E) est équivalente à .
On est alors ramené au cas précédent.

Dans le cas particulier où A est diagonalisable, on obtient une expression simple des solutions :

<u>Propriété 4</u> : Cas où A est constante et diagonalisable

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Soit $(V_1, \cdots, V_n)$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes).
> On définit les applications $X_i : t \mapsto$.
> Alors, les fonctions $X_1, \cdots, X_n$ forment une base de l'e.v. des solutions du système différentiel $X' = AX$.

Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme : $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, avec $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ quelconque dans $\mathbb{K}^n$.

Si le système n'est pas homogène, on cherche une solution particulière du système : $X' = AX+B$ ou, en reprenant la méthode précédente, du système : $Y' = TY +$.