

Méthodes à retenir :

- Si  $\sum a_n x^n$  converge, alors le rayon de convergence  $R$  vérifie :  $R \geq |x|$ .
- Si  $\sum a_n x^n$  diverge, alors le rayon de convergence  $R$  vérifie :  $R \leq |x|$ .
- Pour déterminer le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert vue pour les séries numériques, en posant, pour  $z \neq 0$  :  $\alpha_n = |a_n z^n|$ , puis en discutant selon les valeurs de  $z$ .
- Une fonction  $f$  DSE est paire (resp. impaire) si et seulement si le DSE de  $f$  ne contient que des puissances paires (resp. impaires).
- Pour trouver l'unique solutions DSE de l'équation différentielle linéaire  $a(t)y' + c(t)y = d(t)$ , avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ , lorsque  $a$  ne s'annule pas,  $a, b, c$  sont continues sur  $I$  intervalle,
  - on suppose (analyse) qu'il existe  $r > 0$  et  $(a_n) \in \mathbb{C}^n$  tels que  $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est définie sur  $] -r, r[$  et solution de l'équation différentielle; puis on effectue des regroupements de coefficients et changements d'indices pour réécrire cette équation sous la forme  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0t^n$ ; à l'aide de l'unicité du DSE, on en déduit que les  $c_n$  sont tous nuls, ce qui permet de trouver une relation de récurrence permettant de préciser la suite  $(a_n)$ .
    - on vérifie alors (synthèse) que pour de telles suites le rayon de convergence associé est effectivement strictement positive.
- Cette méthode fonctionne sur des équations différentielles d'ordre 2 ou plus, l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy doit être explicitement admise dans les énoncés.

## I. Applications directes du cours

**Exercice 1** ☆

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

- a)  $\sum_{n \geq 0} 2^n z^n$ ;
- b)  $\sum_{n \geq 1} (n+1)z^n$ ;
- c)  $\sum_{n \geq 0} e^{-n} z^n$ ;

**Exercice 2** ☆

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine  $] -a, a[$ , la fonction  $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^5}$ .

**Exercice 3** ☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n}}{3^n}$ .

**Exercice 4** ☆☆☆

Soit  $x \in ] -1, 1[$ .

1. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ , et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ ;
2. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ , et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ ;
3. Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$ , et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ;

## II. A savoir rédiger

**Exercice 5** ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{ch}(n) x^n$$

**Exercice 6** ☆☆ CCP PSI

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{3n}{n+2} x^n \text{ puis calculer sa somme.}$$

**Exercice 7**

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ , pour  $r > 0$  de l'équation différentielle :

$$y' + 2x^2 y = e^x \quad (E)$$

avec la condition initiale  $y(0) = 1$

## III. Exercices

**Exercice 8** ☆☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n z^n, \text{ avec } a_n = :$$

a)  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ; b)  $\frac{n^n}{e^{nn}}$ ; c)  $\frac{\ln n}{1 + \ln n}$ ; d)  $\begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$  ;

e)  $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ ; f)  $e^{in\theta}$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé;

**Exercice 9** ☆☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la

série entière de terme général  $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$ .

## IV. Pour aller plus loin

**Exercice 10**

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ , pour  $r > 0$  de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$$

avec la condition initiale  $y(0) = a$  et  $y'(0) = b$ , pour  $a, b \in \mathbb{R}$  fixés.

**Exercice 11** ☆☆☆

1. Justifier que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

converge simplement sur  $[0, 1]$ .

3. calculer la somme  $S$  de cette série.

4. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur  $[0, 1]$ ?

**Exercice 12** ☆☆☆

Trouver toutes les solutions développables en série entière sur un voisinage  $] -a, a[$  de 0 de l'équation différentielle :

$$(E) \quad 2x y'' + y' - y = 0$$

**Exercice 13** ☆☆☆

Soient  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 1$ .

On définit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  en posant : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = 2b_n$  et  $b_{n+1} = 3a_n$ .

Déterminer les rayons de convergences et sommes des

séries  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ .

**Exercice 14** ☆☆☆

Trouver le rayon de convergence de la série entière

réelle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

**Exercice 15**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + 3y' - 4x^3y = 0.$$

- Si  $F$  est une solution de  $(E)$  développable en série entière sur un voisinage  $I = ]-a, a[$  de 0 (avec  $a > 0$ ), on note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $x \in I$  :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- Exprimer  $F(0)$  et  $F'(0)$  à l'aide des éléments de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- En déduire qu'il existe une unique solution  $F$  développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation  $(E)$  qui vérifie  $F(0) = 1$  et  $F'(0) = 0$ .
- Quel est son rayon de convergence ?

**Exercice 16** ☆☆☆ Mines-Ponts PC

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-tn} dt$

- Déterminer la limite de  $(I_n)$ .
- Donner un équivalent de  $(I_n)$ .
- Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière de terme général  $I_n x^n$ . Etudier sa convergence en  $R$  et en  $-R$ .

**Exercice 17** ☆☆☆ ☆

Soient  $I = ]-1, 1[$  et  $f : x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$ .

- Rappeler le développement en série entière de  $\text{Arcsin}$  sur  $I$ , et justifier que  $f$  y est développable en série entière.
- Montrer que :  $\forall x \in I, (1 - x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$
- En dérivant, justifier que  $f$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle :  $(E) (1 - x^2)y'' - xy' = 2$
- On note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les coefficients du DSE de  $f$  sur  $I$ .

- montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1)(n + 2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$$

- Calculer  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  et en déduire  $a_0, a_1, a_2$ .

- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0, a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n(2n-1)!}$$

- En déduire le développement en série entière de  $f$  sur  $I$ . Vérifier qu'il est constitué de puissances paires.

**Exercice 18** ☆☆☆ Série de Hadamard

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R$  et  $R'$ .

- Justifier que le rayon de convergence  $R''$  de la série entière  $\sum a_n b_n z^n$  vérifie l'inégalité :  $R'' \geq RR'$
- A l'aide des séries entières  $\sum z^{2n}$  et  $\sum z^{2n+1}$ , justifiez que l'inégalité peut être stricte.

**Exercice 19** ★★★

Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R$  et  $R'$ , justifier que :

1) s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N, |a_n| \leq |b_n|$ , alors  $R' \leq R$ .

2) a) comparer  $R$  et  $R'$  lorsque  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ ;

b) montrer que  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n z^n$  a un rayon de convergence  $R''$  tel que  $R'' \geq RR'$ ;

c) montrer que le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n^3 z^n$  est  $R^3$ ;

d) montrer que le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$  est  $\sqrt{R}$ ;

**Exercice 20** ★★★ Mines-Ponts PC

On pose  $a_0 = 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$

Calculer les  $a_n$  en utilisant la série entière de terme général  $\frac{a_n}{n!} x^n$ .

**Exercice 21**

Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière et solutions de l'équation différentielle :

$$xy''(x) - y(x) = 0$$

**Exercice 22**

Soit

$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Déterminer un intervalle  $I$  ouvert contenant 0 le plus grand possible sur lequel  $f$  peut être définie.
2. Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1.
3. Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.
4. En déduire que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser les coefficients de son développement en série entière.

**Exercice 23**

Former le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

## Notes

<sup>1</sup> correction :

<sup>2</sup> correction :

<sup>5</sup> correction : A l'aide de la règle de d'Alembert pour des séries numériques

<sup>10</sup> correction :  $a_{m+1} = \frac{a_m}{(m+1)(m+2)}, \forall m \geq 0$ , puis  $a_n = \frac{a_0}{n!(n+1)!}, \forall n \geq 0$ .

Puis  $y : x \mapsto \sum \frac{x^n}{n!(n+1)!}$  et r;c.v.  $R = +\infty$ .

$$z'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, z''(x) = \frac{f''(\sqrt{x})}{4x} + \frac{-f'(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}$$

d'où  $f'' - f = 0$ , on peut prendre  $z : x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{x}) + \mu \sin(\sqrt{x})$ .

$$S_E = \{x \mapsto \alpha y(x) + \beta z(x)\}$$

<sup>12</sup> correction :  $y(x) = C1 * \sinh(\sqrt{x}) + C2 * \cosh(\sqrt{x})$

<sup>13</sup> correction :

<sup>14</sup> correction :

<sup>15</sup> correction :

<sup>16</sup> correction :

a) TCD avec  $e^{-t^n} \leq e^{-t}$  b) CDV  $u = t^n, I_n = \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du$  et TCD  $\int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u} du \xrightarrow{f} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  donc  $I_n \sim \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  c)  $R = 1$  par d'Alembert, et la série diverge en 1. Le CSSA donne la convergence en  $-1$ .

<sup>20</sup> correction : On pose  $b_n = \frac{a_n}{n!}$  R le RCV de  $\sum b_n z^n$ . On a  $b_0 = 1$  et  $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} b_k$ ;

On a  $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6$ . et  $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$

$b_n = 1$  pour tout  $n$  est une suite qui convient donc c'est elle et  $a_n = n!$ .

<sup>22</sup> correction :

1.  $f$  définie sur  $] -1, 1[$  et y est DSE comme produit de telles fonctions.

2.  $(x^2 - 1)y' + xy - 1 = 0$

3.  $-(a_1 + 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (na_{n-1} + (n+1)a_{n+1})x^n = 0$

$$a_0 = f(0) = \pi/2 \quad a_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad a_1 = -1 \quad a_{2q+1} = -\frac{(2^q q!)^2}{(2q+1)!}$$

4.  $f$  est DSE sur  $] -1, 1[$  comme produit de telles fonctions!

<sup>23</sup> correction :

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \text{ pour tout } x \in ] -1, 1[.$$