TD : travail en autonomie sur les limites

Ce TD vise à revoir le calcul de limites, il n'a pas pour objet de revenir sur les définitions des limites qu'il faut cependant connaître. On va travailler avec des fonctions, la différence principale pour les suites est que la seule limite qui existe est pour $n \to +\infty$.

1 Rappel sur le calcul de limites

A connaître par cœur :
- les opérations sur les limites ;
- les limites de référence, en particulier les Formes Indéterminées (FI) qu'on connait et qu'on a le droit d'utiliser.

Méthodes (pour déterminer une limite)

1. le cas le plus favorable est lorsqu'on cherche une limite en $a \in \mathbb{R}$ pour une fonction f qui est continue en a : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$.
2. Un peu plus difficile, mais toujours favorable : on peut appliquer les opérations sur les limites (toutes les fonctions ont des limites et il n'y a pas de FI).
3. S'il y a une FI, il faut bien comprendre que beaucoup de choses peuvent se produire : il peut y avoir une limite finie, infinie ou pas de limite du tout. Il faut alors essayer de « sentir » ce qui se passe et modifier la forme de $f(x)$ en mettant en avant les termes les plus importants. L'objectif est d'avoir une nouvelle expression sans FI. Les techniques classiques sont :
   - factoriser par le(s) terme(s) dominant(s) ;
   - utiliser la quantité conjuguée (pour supprimer des racines carrées) ;
   - faire apparaître un nombre dérivé ;
   - utiliser d'autres résultats du cours, les accroissements finis par exemple.
4. Si l'expression est compliquée, en particulier si un terme n'a pas de limites, on peut se servir du Théorème des Gendarmes.
5. Si l'expression n'a pas de limite, on utilise souvent les suites.

Les exercices qui suivent sont classés par difficulté croissante.

Exercice n° 1

Calculer et détailler soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \pi} x^2 + \cos x \quad ; \quad \lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 5) \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{(x-2)^2} \quad ; \quad \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{\ln(3-x)}$$

Exercice n° 2

Calculer et détailler soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 + \ln x \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 - \ln x \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 + \cos x \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$$

Exercice n° 3

Calculer et détailler soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+2}{x^2-1}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sin(\operatorname{Arctan} x) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x} + x \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x$$

Exercice n° 4

a) En utilisant $\left(\frac{1}{\pi n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et une autre suite à trouver, prouver que $\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

b) Justifier que $x \mapsto x\cos(\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité en 0 mais que la fonction obtenue n'est pas dérivable en 0.

c) Etudier les limites en 0 de $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x^2\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$.

Exercice n° 5

Calculer et détailler soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(\mathrm{e}^x)}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt[5]{x^5+x^3} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\sin x\ln x$$

Exercice n° 6

Montrer que $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas en une fonction $\mathcal{C}^1$.

Exercice n° 7

On considère $f(x) = (\sin x)^x$.

1. Justifier que f se prolonge par continuité sur $[0;\pi]$.
2. Etudier la dérivabilité du prolongement.

Nous verrons prochainement de nouveaux outils pour le calcul de limite : l'utilisation des équivalents et des développements limités.