TD : Décomposition en éléments simples

Ce TD constitue une « première approche » sur les polynômes et les fractions rationnelles. Les résultats annoncés n'y sont pas démontrés, une partie le sera lors d'un chapitre dédié au second semestre (une autre partie est admise dans le programme de PCSI).

1 Division euclidienne de polynômes, théorème de d'Alembert-Gauss

Définition

— On note $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ les ensembles des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ réspectivement. On écrira $\mathbb{K}[X]$ pour dire indifféremment $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$.

— Le degré d'un polynôme non nul correspond au degré de son monôme de plus haut degré et on convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Théorème

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un **unique** couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = BQ + R \qquad \text{et}$$

On dit alors que

Exercice

Poser les divisions euclidiennes de $3X^3 - 5X$ par $2X+1$; de $(2-\mathrm{i})X^2 + 3\mathrm{i}X - 1$ par $(1+\mathrm{i})X + 2$ et de X^2 par $X^3 + 4X$.

Théorème

(d'Alembert-Gauss)

Dans $\mathbb{C}[X]$, tous polynôme P non constant s'écrit de la forme $P = \lambda(X-z_1)(X-z_2)\dots(X-z_n)$ avec $n = \deg P$; $z_1, z_2 \dots z_n$ qui sont les racines (pas nécessairement distinctes) de P et λ qui est le coefficient dominant de P.

Exemples : $2X^3 - 2 = 2(X^3-1) = 2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et $X^6 + 2X^5 + X^4 = X^4(X+1)^2$.

Remarques :

a) La façon dont il faut comprendre ce résultat fondamental est que tout polynôme non constant P peut être « coupé » en produit de polynômes de degré 1. C'est la forme la plus simple de P.

b) la décomposition de P en produit de polynômes de degré 1 est l'analogue dans $\mathbb{K}[X]$ de la décomposition en produits de facteurs premiers des entiers. Les polynômes de degré 1 sont les **polynômes irréductibles** de $\mathbb{C}[X]$.

c) Le théorème donné peut être précisé : à l'ordre près des facteurs, la décomposition de P est unique.

Proposition

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ sont

Exemple : la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $2X^3 - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

2 Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

On sait facilement passer d'une somme de fractions rationnelle à une seule fraction rationnelle en réduisant au même dénominateur :

$\frac{4}{2X+1} + \frac{X+2}{X^2+X+1} =$

La décomposition en éléments simples correspond à faire le contraire : à casser une fraction rationnelle compliquée en des fractions rationnelles plus simples.

Méthode

Pour décomposer une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ en éléments simples :

1. on trouve la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$;
2. on écrit $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$;
3. on trouve la décompostion de B en polynômes irréductibles : $B = B_1^{\alpha_1} \dots B_m^{\alpha_m}$ avec les α_i qui sont des entiers naturels non nuls ;
4. on peut écrire la fraction $\frac{A}{B}$ sous la forme :

$$Q + \frac{?}{B_1} + \frac{?}{B_1^2} + \dots + \frac{?}{B_1^{\alpha_1}} + \frac{?}{B_2} + \dots + \frac{?}{B_m^{\alpha_m}}$$

avec chaque numérateur qui est un polynôme de degré strictement inférieur au polynôme B_i du dénominateur.

Exemples :

a) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{X^3+X}{X^2-5X+4}$.

b) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{X}{(X+1)^2(X-3)}$.

c) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{X^2+5X+2}{X^3-1}$.