TD : Retour sur l'intégration par changement de variable

Ce TD vise à revoir la technique du changement de variable pour le calcul des intégrales, on l'applique en particulier à l'intégration des fractions rationnelles décomposées en éléments simples.

1 Rappel sur le calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit $(a, b) \in I^2$. Puisque f est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ existe (et on peut l'interpréter comme une surface algébrique si, et seulement si, $a \leq b$).

Méthode
Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$:

1. si on dispose d'une primitive F de f alors le calcul de l'intégrale devient une soustraction !
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x =$$
2. Sinon, on peut envisager une intégration par parties en voyant $f(x)$ comme le produit $u'(x)v(x)$ et en utilisant la formule :
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x =$$
3. Sinon, on peut essayer un changement de variable en introduisant une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective :
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Attention pour l'IPP et pour le changement de variable : on passe d'une intégrale qu'on ne sait pas calculer à une intégrale qu'on espère pouvoir calculer, ça peut ne pas fonctionner !

Remarque : on avait donné une formule légèrement différente (au niveau des bornes) dans le cours, on l'a modifiée ici pour unifier les notations entre les différentes techniques d'intégration.

2 Le changement de variable en pratique et par l'exemple

Méthode
Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ avec un changement de variable :

1. soit on a une idée de fonction $\varphi(t)$ et on écrit $x = \varphi(t)$, soit il y a une partie de $f(x)$ qu'on veut prendre comme nouvelle variable, disons $bidule(x) = t \iff x = bidule^{-1}(t)$.
2. On calcule $\varphi'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ce qui donne $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.
3. $f(x)\ \mathrm{d}x$ devient donc $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$.
4. Concernant les bornes, si x varie de a à b alors $t = \varphi^{-1}(x)$ varie de $\varphi^{-1}(a)$ à $\varphi^{-1}(b)$.

Exemples :

a) Calculons $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$.

— On ne connait pas de primitive de l'intégrande, l'IPP ne semble pas adaptée. $\sqrt{1-x^2}$ se simplifierait si on avait cos ou sin à la place de x, on va faire le changement de variable $x = \cos t$.

— On applique les étapes de la méthode précédente :

1. $x = \cos t$ (soit $\varphi(t) = \cos t$ dans la formule).
2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ et donc on remplaçera dx par $-\sin t$ dt.
3. L'intégrande $\sqrt{1-x^2}$ dx devient $\sqrt{1-\cos^2 t} \times (-\sin t)\ \mathrm{d}t = -\sin t |\sin t|\ \mathrm{d}t$.
4. Concernant les bornes, x varie de 0 à 1 et donc $t = \arccos x$ varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin t |\sin t|\ \mathrm{d}t$.

Entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, $\sin t \geq 0$ dons $|\sin t| = \sin t$, et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin t|\sin t|\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \mathrm{d}t$.

On linéarise l'intégrande : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^2 t = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$ et on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}}$.

b) Calculons $\displaystyle\int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

— On ne connait pas de primitive de l'intégrande, l'IPP ne semble pas adaptée. La difficulté repose sur la présence de $\sqrt{x}$, on va faire le changement de variable $t = \sqrt{x}$.

— On applique les étapes de la méthode précédente :

1. $t = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = t^2$ (soit $\varphi(t) = t^2$ dans la formule).
2. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ et donc on remplaçera dx par $2t\mathrm{d}t$.
3. L'intégrande $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ devient donc $\dfrac{1}{1+t}2t\mathrm{d}t$.
4. Concernant les bornes, x varie de 1 à 16 donc $t = \sqrt{x}$ varie de 1 à 4.

On a donc : $\displaystyle\int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t$.

— On ne connait pas de primitive de l'intégrande mais il s'agit d'une fraction rationnelle qu'on peut décomposer en éléments simples puis intégrer :

$$\int_1^4 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_1^4 2 - \frac{2}{1+t}\mathrm{d}t = [2t - 2\ln|1+t|]_1^4 = 6 + 2\ln\frac{2}{5}$$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 6 + 2\ln\frac{2}{5}}$.

Exercice

On veut calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

a) Pourquoi est-il raisonnable d'envisager un changement de variable ? Que pourrait-on essayer comme nouvelle variable pour simplifier l'expression de l'intégrande ?

b) Faire le changement de variable $u = \sqrt{1+x^2}$ dans I, on obtient une nouvelle intégrale dont l'intégrande est une fraction rationnelle.

c) Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples, en déduire que la valeur exacte de I est $\ln\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}}$.

3 Intégration de fractions rationnelles

Si on a une fraction rationnelle dont le dénominateur est sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles, on sait « casser » cette fraction en une somme d'éléments simples.

Exercice
Décomposer $\dfrac{X^4+1}{X^2(X^2+1)}$ en élément simples.

Les éléments simples sont de plusieurs formes :

- $\dfrac{\lambda}{(aX+b)^n}$ avec λ, a, b des réels ($a \neq 0$) et n un entier naturel ≥ 1 ;
- $\dfrac{\lambda X+\mu}{(aX^2+bX+c)^n}$ avec λ, μ, a, b, c des réels (tels que $b^2-4ac<0$) et n un entier naturel ≥ 1.

Comment intégrer ces éléments simples ?

i. Le premier type d'éléments simples est dit « de première espèce » ne pose pas de problème car

ii. Le dernier type d'éléments simples est dit « de seconde espèce » et nécessite de faire des changements de variables. On va se limiter à la présentation d'exemples pour $n=1$ (pour $n>1$, le principe est similaire mais il y a plusieurs cas possibles et Arctan n'est pas la seule fonction qui peut intervenir).

Exercice
Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(x+1)^3}$ sur $]-1;+\infty[$.

Exercice
On veut une primitive de $\frac{1}{3x^2+2x+1}$.

a) Donner une primitive à l'aide d'une intégrale.
b) Ecrire $3X^2+2X+1$ sous forme canonique, c'est-à-dire sous une forme $\alpha\left((X+\beta)^2+\gamma^2\right)$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ à détermier.
c) Dans l'intégrale donnée en a), faire les changements de variables $t=x+\beta$ puis $t=u\gamma$.
d) Reconnaître la primitive d'une fonction connue et conclure.
e) Vérifier le résultat obtenu.

Exercice
On veut une primitive de $\frac{x}{3x^2+2x+1}$.

a) Trouver une astuce qui permet de ramener $\frac{x}{3x^2+2x+1}$ à la somme de deux fractions rationnelles : une simple à intégrer, l'autre qui correspond à l'exercice précédent.
b) Conclure.

On a illustré une méthode générale pour intégrer les éléments simples de première espèce :

Méthode
Pour intégrer un élément irréductible de la forme $\dfrac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c}$:

- cas $\lambda = 0$:
  1. on met le dénominateur sous forme canonique ;
  2. à l'aide de deux changements de variables on fait apparaître l'intégrande $\frac{1}{1+x^2}$;
  3. on utilise $\operatorname{Arctan} x$ qui est une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.
- cas $\lambda \neq 0$:
  1. On écrit $\frac{\lambda x+\mu}{ax^2+bx+c} = \frac{\lambda}{2a}\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{\mu-\frac{\lambda b}{2a}}{ax^2+bx+c}$
  2. La première fraction est de la forme $\frac{u'}{u}$, elle s'intègre en $\ln|u|$; la seconde fraction relève du cas précédent et fera intervenir Arctan.

Exercice
Calculer une primitive de $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4 Des exercices pour s'entrainer

1. En posant $u = \frac{1}{x}$, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.
3. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une expression de la primitive de $x \longmapsto \sin(\ln x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annule en 1.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.
5. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^4+1}$
6. Dans le cas de fonctions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, un changement de variable qui peut être payant est $u = \tan\frac{x}{2}$.
   (a) Soit $x \in]-\pi;\pi[$. Exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.
   (b) Soit $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. Exprimer $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.
   (c) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$