TD : Rédiger (suite)

Nous avons déja consacré une séance de TD aux raisonnements, nous avions vu comment faire une démonstration directe, comment démontrer qu'une propriété est fausse à l'aide d'un contre-exemple, comment rédiger un raisonnement par l'absurde ainsi qu'une démonstration par récurrence.

1 Le raisonnement par Analyse-Synthèse

Méthode
Pour faire un raisonnement par Analyse-Synthèse :

1. **Analyse** : on suppose avoir trouvé une réponse au problème posé, on trouve des conditions que doit vérifier cette solution.
2. **Synthèse** : si on prend un objet qui vérifie les conditions qui ont été trouvées, on vérifie qu'alors il est solution du problème.

Exercice
Prouver que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

1. **Analyse** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe deux fonctions p et i, respectivement paire et impaire, telles que $f = p + i$.
   a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $p(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.
   b) Fair l'analogue pour $i(x)$.
2. **Synthèse** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vérifier qu'en définissant p et i comme on l'a vu, on écrit bien f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Remarque : a-t-on bien vu qu'il y a unicité de la décomposition ?

2 La récurrence forte

Méthode
Pour démontrer par récurrence forte que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : on vérifie $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$. On suppose que la propriété est vraie aux rangs $n_0, n_0+1, \ldots, n$; on montre qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.
   (en termes de logique : $(P(n_0), \ldots, P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$).
3. **Conclusion** : la propriété étant vraie au rang n_0 et étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice
Soit la suite u définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \end{array} \right.$.

1. Calculer les premiers termes de la suite jusqu'à pouvoir formuler une conjecture.
2. Démontrer la conjecture par récurrence.