PSI **Mars 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Topologie

Exercice 1. (extrait écrit CCINP 2017 PSI) Dans tout le problème, on se donne $n \geq 2$ un entier et on note

- $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels
- $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices **nilpotentes** de $\mathcal{E}$, c'est à dire des $A \in \mathcal{E}$ telles qu'il existe un entier p avec $A^p = O_n$.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est une partie fermée de $\mathcal{E}$.
2. Soient $A \in \mathcal{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.
   Montrer que $\det(M) = 1$. En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathcal{N}$ est vide.
3. Soit F un sous-espace de $\mathcal{E}$. Montrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = \mathcal{E}$.
   Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Exercice 2. (Extraît E3A 2018 PSI) Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et
$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathscr{D}_2$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathscr{D}_2 \subset F$.
3. $\mathscr{D}_2$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 3. Soient $E = C([0,1], \mathbb{R})$ normé par la norme infinie.
On considère $A = \{f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1\}$.
Montrer que A est fermée puis que $\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$ *faire par l'absurde*

Exercice 4.
1. Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, prouver que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^n)_n$ converge vers une matrice B. Montrer que $B = 0$.

Exercice 6. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ qui s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. On admet que c'est une norme.
On considère les applications u et v définies sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = P(0) \text{ et } v(P) = P'$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], |u(P)| \leq N(P)$
2. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = X^n$. Les suites $(P_n)_n$ et $(v(P_n))_n$ sont elles bornées dans $(\mathbb{R}[X], N)$
3. Etudier la continuité de u et v sur l'evn $(\mathbb{R}[X], N)$

Exercice 7. (Mines 2020)

1. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.
2. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |A_{i,j}|.$$

3. Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
   Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k$.
   (a) Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :
   $$\forall Q \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Exp}({}^t\!QAQ) = {}^t\!Q\,\mathrm{Exp}(A)Q.$$
   On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, la série numérique $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

Exercice 8. (Mines 2017) Matrices stochastiques On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

1. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.
3. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9. (Oral Centrale PSI) Soit A une partie non vide d'un evn E de dimension finie? Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a\in A} \|x-a\|$. Soit $R > 0$ et $A(R) = \{x \in E, d(x,A) \leq R\}$. Montrer que , si A est convexe, alors $A(R)$ est convexe et fermé.