TP : Intégration numérique

Nous avons vu en cours les bases de l'intégration numérique, l'objectif de ce TP est de les mettre en oeuvre, de les tester et d'envisager quelques prolongements.

Comme support de ce TP vous devez travailler sur un des deux scripts proposés et qui correspondent à deux versions de ce TP en fonction de la difficulté de codage. Le fichier `tpIntegrationV1.py` comporte une partie plus importante du code final que le fichier `tpIntegrationV2.py`. Nous vous laissons le choix de la version avec laquelle vous travaillerez.

1 Mise en œuvre et test de la méthode des rectangles à gauche

La méthode des rectangles à gauche correspond à calculer les sommes de Riemann en prenant comme hauteur des rectangles la borne gauche de chaque intervalle.

1. Compléter la fonction `methRectG` du code proposé, on veillera également à compléter les commentaires.
2. Pour tester notre méthode, on va se servir de la fonction de Runge est $\mathcal{R} : t \longmapsto \frac{1}{25+t^2}$, on va calculer des valeurs approchées de $\displaystyle\int_0^5 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.
   a) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^5 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.
   b) Affecter cette valeur à la variable globale `valeurExacte`.
   c) Compléter le code de la fonction `fonctionRunge`.
3. La procédure `erreurRectG` provoque l'affichage d'un graphique de l'erreur commise par la méthode des rectangles à gauche avec pour plusieurs valeurs de n pour l'approximation de $\displaystyle\int_0^5 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.
   a) Commenter le code de `erreurRectG`.
   b) Modifier le code de `erreurRectG` pour créer une procédure `erreurRectLog` qui affichera le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du nombre de points de la subdivision. Qu'observez-vous ? Comment l'expliquer ?

2 Mise en œuvre des autres méthodes et comparaison

1. Proposer des fonctions `methRectD`, `methPtMilieu` et `methTrap` qui mettent en oeuvre les methodes des rectangles à droite, du point milieu et des trapèzes pour fournir une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. On se base toujours sur l'approximation de $\displaystyle\int_0^5 \mathcal{R}(t)\ \mathrm{d}t$.
   Créer une procédure `compareErreur` qui affiche sur une même courbe les logarithmes des erreurs commises par les différentes méthodes en fonction du logarithme du nombre de points de la subdivision. Qu'observez-vous ? Comment l'expliquer ?

> Les méthodes issues de l'analyse numérique ont toutes un fonctionnement similaire basé sur le choix d'une méthode élémentaire. Il est possible de les programmer sous cette forme avec :
> — des fonctions `rectanglesG_elem`, `rectanglesD_elem`, `ptMilieu_elem` et `trapeze_elem` ;
> — une unique fonction qui construit la méthode composée.
> Vous trouverez une telle version dans le corrigé, essayez de la réaliser vous-même au préalable.

3 Prolongement 1 : méthode de Simpson

1. On cherche une méthode élémentaire à trois points, c'est-à-dire que, pour cette question l'intervalle d'intégration est supposé « petit ». On procède de la façon suivante :
   - on va approcher $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ par une expression de la forme $\omega_0 f(a) + \omega_1 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_2 f(b)$;
   - on veut que l'approximation soit exacte pour les polynômes de degré inférieurs à 2.

   a) On considère les polynômes $P_0 = 1$; $P_1 = X - \frac{a+b}{2}$; $P_2 = (X-a)(X-b)$. Dessiner l'allure de leurs courbes représentatives sur $[a;b]$.

   b) Justifier que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   c) Expliquer pourquoi, si la méthode est exacte pour P_0, P_1 et P_2 alors elle l'est pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

   d) Calculer $\int_{[a;b]} P_0$, $\int_{[a;b]} P_1$ et $\int_{[a;b]} P_2$.

   e) En déduire $\omega_0 = \ \omega_1 = \frac{1}{6}$ et $\omega_2 = \frac{4}{6}$.
2. Programmer la méthode d'intégration de Simpson.
3. Comparer la méthode de Simpson aux autres méthodes d'intégration numérique.
4. L'erreur dans la méthode de Simpson est en $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Cela correspond-il à l'observation ?

Vérifiez que la méthode élémentaire de Simpson est également exacte pour les polynômes de degré 3, mais pas pour ceux de degré 4.
Ce phénomène (dû à l'imparité) est commun à toutes les méthodes de Newton-Cotes : une méthode élémentaire construite avec $2n+1$ points est d'ordre $2n+1$. (Lorsqu'on utilise $2n$ points, on a une méthode d'ordre $2n-1$).

4 Prolongement 2 : méthodes de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo reposent sur la **loi forte des grands nombres** : si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la moyenne des résultats obtenus va converger vers l'espérance (c'est-à-dire la moyenne théorique).

A) Méthode de Monte Carlo pour calculer une intégrale
Si on prend au hasard un grand nombre de points x_i dans l'intervalle $[a;b]$ la moyenne des $f(x_i)$ va converger vers la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

1. Rappeler la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.
2. En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Puis un algorithme pour approcher cette intégrale. En vous servant de la fonction `random` du module `random`, proposer une fonction `methMonteCarlo` qui fournit une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ puis comparer cette méthodes aux précédentes.

Les méthodes de Monte Carlo sont moins qualitatives en petite dimension mais permettent d'avoir un résultat en dimension supérieures lorsque les méthodes d'analyse numérique deviennent trop coûteuses.
Pour comprendre cela : si on décide de découper $[0;1]$ avec une subdivision de 100 points, on obtient 100 rectangles lorsqu'on intègre sur $[0;1]$ mais $100^2 = 10000$ parallélépipèdes lorsqu'on intègre sur $[0;1]^2$ et $100^3 = 10^6$ polyhèdres élémentaires à 4 dimensions si on intègre sur $[0;1]^3$.
Partager $[0;1]$ en 100 n'est pas très précis et on pourrait intégrer sur une dimension nettement supérieure : on arrive rapidement aux limites de l'ordinateur.

B) Méthode de Monte Carlo pour calculer une surface (autre qu'une intégrale)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la **conique** $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + 3y^2 = 1$. L'objectif de cette question est d'estimer la surface $\mathcal{S}$ délimitée par $\mathcal{C}$.

1. A l'aide de GeoGebra (ou d'un autre logiciel de géométrie), observer $\mathcal{C}$.
2. Soit les points $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$. Justifier que $\mathcal{S}$ est incluse dans le carré $ABCD$.
3. En prenant des points au hasard dans $ABCD$, proposer une méthode de Monte Carlo qui fournit une estimation de la surface $\mathcal{S}$.
4. Mettre en œuvre la méthode proposée à la question précédente et proposer une valeur approchée pour $\mathcal{C}$.
5. Refaire plusieurs fois le calcul, que constatez-vous ? Comment améliorer (un peu) la méthode ?