Solution de l'équation homogène : démonstration

Objectif et notations :

Soit a, b et c des nombres avec $a \neq 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle homogène $(E)\ :\ ay''+by'+cy=0$ où y désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,

Dans un premier temps, on va travailler dans le cas complexe : a, b et c ne sont pas nécessairement réels et y pourra être à valeurs complexes.

Dans un second temps, on étudiera le cas réel : a, b et c sont des réels et y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

A - Cas complexe

1. Prouver que (E) admet au-moins une solution de la forme $t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$.
2. Soit $r \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation du second degré (E_c) : $ar^2+br+c=0$.
   Prouver que $y = f(t)\mathrm{e}^{rt}$ est solution de (E) si, et seulement si, f' est solution d'une équation différentielle qu'on sait résoudre.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

B - Cas réel

1. En s'appuyant sur la partie **A**, résoudre le problème dans le cas où $b^2 \geq 4ac$.
2. On se place à présent dans le cas où $b^2 < 4ac$.
   On note $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ les deux solutions complexes conjuguées de (E_c) (avec α et β des réels).

   Raisonnons par analyse-synthèse : supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit solution de (E).

   a) Justifier qu'il existe des complexes λ et μ tels que $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t} + \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t})$.
   b) En remarquant que $f(0)$ et $f'(0)$ sont des réels, prouver que $\lambda = \overline{\mu}$.
   c) En déduire qu'il existe des réels γ et δ tels que $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma\cos(\beta t) + \delta\sin(\beta t))$.
   d) Conclure.