# Solution de l'équation homogène : démonstration

**Objectif et notations :**

Soit $a, b$ et $c$ des nombres avec $a \neq 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle homogène $(E)\ :\ ay''+by'+cy=0$ où $y$ désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,

Dans un premier temps, on va travailler dans le cas complexe : $a, b$ et $c$ ne sont pas nécessairement réels et $y$ pourra être à valeurs complexes.

Dans un second temps, on étudiera le cas réel : $a, b$ et $c$ sont des réels et $y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

**A - Cas complexe**

1. a) Soit $r \in \mathbb{C}$. Prouver que $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ est solution de $(E)$ si, et seulement si, $r$ est solution de l'équation caractéristique $(E_c)$ : $ar^2 + br + c = 0$.
   b) En déduire qu'il existe toujours au moins une valeur $r \in \mathbb{C}$ telle que $t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}$ soit solution de $(E)$. Dans la suite, on conserve cette notation.
2. On va chercher les autres solutions de $(E)$ sous la forme $y = f(t)\mathrm{e}^{rt}$, où $f$ est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Prouver que $y = f(t)\mathrm{e}^{rt}$ est solution de $(E)$ si, et seulement si, $f'$ est solution de l'équation différentielle :

   $$(\widehat{E}) : z' + (2r + \frac{b}{a})z = 0$$

   b) Résoudre $(\widehat{E})$.
   c) En distinguant deux cas, déduire la forme de $f(t)$.
   d) Conclure qu'on a l'alternative suivante :
      - si $(E_c)$ admet une unique solution $r$ alors les solutions de $(E)$ sont de la forme $t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}(\lambda t + \mu)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
      - Si $(E_c)$ admet deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$ alors les solutions de $(E)$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

**B - Cas réel**

À présent, on a $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et on cherche les solutions à valeurs réelles de $(E)$.

1. En s'appuyant sur la partie **A**, donner les solutions dans le cas où $(E_c)$ a un discriminant positif ou nul.
2. On se place à présent dans le cas où $(E_c)$ a un discriminant strictement négatif.
   a) Justifier que $(E_c)$ admette deux solutions complexes conjuguées que l'on note $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ (avec $\alpha$ et $\beta$ des réels dont on précisera les valeurs).
   b) Raisonnons par analyse-synthèse et supposons que $(E)$ admette un solution $f$ à valeurs réelles . Justifier qu'il existe des complexes $\lambda$ et $\mu$ tels que :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t} + \mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t}\right)$$

   c) En remarquant que $f(0)$ est réel, prouver que $\mathrm{Im}(\lambda) = -\mathrm{Im}(\mu)$.
   d) De façon analogue, en utilisant que $f'(0)$ est réel, prouver que $\mathrm{Re}(\lambda) = \mathrm{Re}(\mu)$.
   e) En déduire que $\lambda$ et $\mu$ sont conjugués, puis qu'il existe des réels $\gamma$ et $\delta$ tels que

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma \cos(\beta t) + \delta \sin(\beta t))$$

   f) Conclure.